This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Google

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

B. G. TEUBNER'S LEHRBÜCHER
DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN III

E. PASCAL
DIE DETERMINANTEN

Teubners ꟷ Sammlung

von Lehrbüchern auf dem Gebiete der

Mathematischen Wissenschaften

mit Einschlufs ihrer Anwendungen.

Im Teubnerschen Verlage erscheint unter obigem Titel in zwangloser Folge eine längere Reihe von zusammenfassenden Werken über die wichtigsten Abschnitte der Mathematischen Wissenschaften mit Einschlufs ihrer Anwendungen.

Die anerkennende Beurteilung, welche der Plan, sowie die bis jetzt erschienenen Aufsätze der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften gefunden haben, die allseitige Zustimmung, welche den von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung veranlafsten und herausgegebenen eingehenden Referaten über einzelne Abschnitte der Mathematik zu teil geworden ist, beweisen, wie sehr gerade jetzt, wo man die Resultate der wissenschaftlichen Arbeit eines Jahrhunderts zu überblicken bemüht ist, sich das Bedürfnis nach zusammenfassenden Darstellungen geltend macht, durch welche die mannigfachen Einzelforschungen auf den verschiedenen Gebieten mathematischen Wissens unter einheitlichen Gesichtspunkten geordnet und einem weiteren Kreise zugänglich gemacht werden.

Die erwähnten Aufsätze der Encyklopädie ebenso wie die Referate in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung beabsichtigen in diesem Sinne in knapper, für eine rasche Orientierung bestimmter Form den gegenwärtigen Inhalt einer Disciplin an gesicherten Resultaten zu geben, wie auch durch sorgfältige Litteraturangaben die historische Entwickelung der Methoden darzulegen. Darüber hinaus aber mufs auf eine eingehende, mit Beweisen versehene Darstellung, wie sie zum selbständigen, von umfangreichen Quellenstudien unabhängigen Eindringen in die Disciplin erforderlich ist, auch bei den breiter angelegten Referaten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, in welcher hauptsächlich das historische und teilweise auch das kritische Element zur Geltung kommt, verzichtet werden. Eine solche ausführliche Darlegung, die

sich mehr in dem Charakter eines auf geschichtlichen und litterarischen Studien gegründeten Lehrbuches bewegt und neben den rein wissenschaftlichen auch pädagogische Interessen berücksichtigt, erscheint aber bei der raschen Entwickelung und dem Umfang des zu einem großen Teil nur in Monographien niedergelegten Stoffes durchaus wichtig, zumal, im Vergleiche z. B. mit Frankreich, bei uns in Deutschland die mathematische Litteratur an Lehrbüchern über spezielle Gebiete der mathematischen Forschung nicht allzu reich ist.

Die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner giebt sich der Hoffnung hin, daſs sich recht zahlreiche Mathematiker, Physiker und Astronomen, Geodäten und Techniker, sowohl des In- als des Auslandes, in deren Forschungsgebieten derartige Arbeiten erwünscht sind, zur Mitarbeiterschaft an dem Unternehmen entschlieſsen möchten. Besonders nahe liegt die Beteiligung den Herren Mitarbeitern an der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Die umfangreichen litterarischen und speziell fachlichen Studien, welche für die Bearbeitung von Abschnitten der Encyklopädie vorzunehmen waren, konnten in dem notwendig eng begrenzten Rahmen nicht vollständig niedergelegt werden. Hier aber, bei den Werken der gegenwärtigen Sammlung ist die Möglichkeit gegeben, den Stoff freier zu gestalten und die individuelle Auffassung und Richtung des einzelnen Bearbeiters in höherem Maſse zur Geltung zu bringen. Doch ist, wie gesagt, jede Arbeit, die sich dem Plane der Sammlung einfügen läſst, im gleichen Maſse willkommen.

Bisher haben die folgenden Gelehrten ihre geschätzte Mitwirkung zugesagt, während erfreulicherweise stetig neue Anerbieten zur Mitarbeit an der Sammlung einlaufen, worüber in meinen „Mitteilungen" fortlaufend berichtet werden wird:

P. Bachmann, niedere Zahlentheorie.
M. Bôcher, über die reellen Lösungen der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.
G. Brunel, Analysis situs.
G. Castelnuovo und **F. Enriques**, Theorie der algebraischen Flächen.
F. Dingeldey, Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme.
F. Dingeldey, Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung.
F. Enriques, Prinzipien der Geometrie.

J. Harkness, elliptische Funktionen.
G. Kohn, rationale Kurven.
A. Krazer, Handbuch der Lehre von den Thetafunktionen.
R. v. Lilienthal, Differentialgeometrie.
G. Loria, spezielle, algebraische und transcendente Kurven der Ebene. Theorie und Geschichte.
A. Löwy, Vorlesungen üb. d. Theorie d. linearen Substitutionsgruppen.
R. Mehmke, über graphisches Rechnen und über Rechenmaschinen, sowie über numerisches Rechnen.
E. Netto, Kombinatorik.
W. F. Osgood, allgemeine Funktionentheorie.
E. Pascal, Determinanten. Theorie und Anwendungen.
S. Pincherle, Funktional-Gleichungen und -Operationen.
A. Pringsheim, Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre. (Elementare Theorie der unendlichen Algorithmen und der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.) Bd. I. Zahlenlehre. Bd. II. Funktionenlehre.
C. Segre, Vorlesungen über algebraische Geometrie, mit besonderer Berücksichtigung der mehrdimensionalen Räume.
D. Seliwanoff, Differenzenrechnung.
M. Simon, Elementargeometrie.
P. Stäckel, Differentialgeometrie höherer Mannigfaltigkeiten.
O. Staude, Flächen und Flächensysteme zweiter Ordnung.
O. Stolz und **J. A. Gmeiner**, theoretische Arithmetik.
R. Sturm, Theorie der geometrischen Verwandtschaften.
R. Sturm, die kubische Raumkurve.
K. Th. Vahlen, Geschichte des Fundamentalsatzes der Algebra.
K. Th. Vahlen, Geschichte des Sturmschen Satzes.
A. Voss, Abbildung und Abwicklung der krummen Flächen.
E. v. Weber, Vorlesungen über das Pfaffsche Problem u. die Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung.
A. Wiman, endliche Gruppen linearer Transformationen.
H. G. Zeuthen, die abzählenden Methoden der Geometrie.

In Aussicht genommen:

W. Wirtinger, algebraische Funktionen und ihre Integrale.
W. Wirtinger, partielle Differentialgleichungen.

☞ Mitteilungen über weitere Bände werden baldigst folgen.

LEIPZIG, Poststrasse 3,
Juli 1900.

B. G. Teubner.

B. G. TEUBNER'S SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.
III. BAND.

ERNESTO PASCAL,
ORD. PROFESSOR AN DER KÖNIGL. UNIVERSITÄT ZU PAVIA.

DIE DETERMINANTEN.

EINE DARSTELLUNG
IHRER THEORIE UND ANWENDUNGEN MIT RÜCKSICHT
AUF DIE NEUEREN FORSCHUNGEN.

BERECHTIGTE DEUTSCHE AUSGABE

VON

DR. HERMANN LEITZMANN.

LIBRARY
LELAND STANFORD JUNIOR
UNIVERSITY

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1900.

117316

LIBRARY
LELAND STANFORD JUNIOR
UNIVERSITY

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort des Verfassers.

Über die Determinanten sind, zumal in der letzten Zeit, sehr viele besondere Untersuchungen angestellt worden, die aus mannigfachen Gründen in den Lehrbüchern noch nicht haben Berücksichtigung finden können.

Ich habe es mir zur Aufgabe gemacht, auf knappem Raum alles derartige, soweit es mir möglich, zusammen zu bringen, damit im vorliegenden Buche alle diese Untersuchungen mehr oder weniger ausführlich an der ihnen gebührenden Stelle behandelt würden.

Aus diesem Gesichtspunkte hege ich das Zutrauen, dass mein Buch denen einige Hilfe wird bieten können, die sich von den mancherlei Fortschritten, die in diesem Zweige der Analysis bisher gemacht worden sind, eine Vorstellung bilden wollen. Und es genügt ja, das Inhaltsverzeichniss dieses Bandes zu durchlaufen, um gewahr zu werden, dass hier eine ganze Menge von Gegenständen vereinigt ist, die nun zum ersten Male in einem Lehrbuche über Determinanten ihren Platz finden. Es erscheint dies um so bedeutsamer, wenn man daran denkt, dass gar oft der Grund dafür, dass ein Schriftsteller Dinge, die schon längst bekannt sind, als etwas Neues veröffentlicht, vorzüglich in der Thatsache zu suchen ist, dass solche Gegenstände eben noch nicht in die Lehrbücher aufgenommen worden sind, denn die vermitteln wohl ohne Zweifel die Verbreitung der Forschungsergebnisse am Besten. Beispiele hierzu giebt es gerade in der Lehre von den Determinanten genug; brauchen wir uns doch nur der mancherlei Arbeiten zu erinnern, die einander gefolgt sind bei der Behandlung der Klasse von Determinanten, die mit den Unterdeterminanten einer anderen gegebenen gebildet sind.

Das vorliegende Buch ist in zwei Abschnitte geschieden: innerhalb des ersten ist alles das enthalten, worum ein Anfänger in diesem Gebiete sich würde zu bemühen haben; im zweiten, sehr viel ausgedehnteren Theile finden sich mit allen Einzelheiten bibliographischer Anmerkungen die besonderen Forschungen, von denen oben gesprochen worden.

Ich bin auf die geometrischen Anwendungen nicht allzu sehr eingegangen, weil ja die Determinantenlehre gewissermassen bei jedem Schritt, den man in der analytischen Geometrie zu thun hat, sich anwenden lässt, und weil ich denke, wie auch Günther es schon in der Vorrede zu seiner werthvollen Behandlung unseres Gegenstandes gesagt hat, ein Buch über Determinanten sollte nicht ein Buch über analytische Geometrie werden.

Pavia, im Frühling des Jahres 1896.

Ernesto Pascal.

Für die vorliegende deutsche Ausgabe meines im Jahre 1897 in italienischer Sprache (im Verlage von Hoepli in Mailand) erschienenen Buches habe ich verschiedene Zusätze und Änderungen verfasst und desgleichen einen kurzen Abriss von der geschichtlichen Entwicklung der Determinantenlehre beigegeben.

Herrn Dr. Leitzmann spreche ich meinen lebhaften Dank aus und hege die Hoffnung, dass die Übersetzung, die von ihrem Herausgeber mit wirklicher Liebe und vielem Verständniss besorgt worden ist, bei mathematischen Lesern des gelehrten Deutschlands günstige Aufnahme finden werde.

Pavia, im April 1900.

Ernesto Pascal.

Vorbemerkung des Herausgebers.

Der wachsende Umfang der mathematischen Wissenschaften, ihre Vielseitigkeit in Lehrgegenständen und Methoden hat naturgemäss ein Streben zur Folge, das darauf ausgeht, den einheitlichen Zusammenhang der gesonderten Wissenschaftszweige erkennbar zu erhalten und ihre gegenseitige Wechselwirkung zu beleben. Es sind Erscheinungen gesellschaftlicher und literarischer Art, die von der Bedeutung dieses Zielpunktes für den Entwicklungsgang der neueren Mathematik Zeugniss ablegen und unter den letzteren treten hervor die Bemühungen um die Erkenntniss der Geschichte der Wissenschaft und die Werke von enzyklopädischer Art, im Anschluss hieran auch B. G. Teubners neueste Sammlung von Lehrbüchern, der der vorliegende Band eingereiht worden ist.

In Hinsicht auf Bestrebungen, die den Zusammenschluss der mathematischen Forschungen zum Ziele haben, nimmt die Determinantenlehre wohl eine bevorzugte Stellung ein, insofern sie an und für sich vermöge der weitgehenden Anwendbarkeit ihrer Algorithmen und Ergebnisse zu einem Bindeglied zwischen den verschiedensten Lehrgebieten befähigt und bestimmt scheint. Als „Werkzeug der Algebra und Analysis“ haben die Determinanten in stetig erweitertem Umfange die hohen Erwartungen gerechtfertigt, mit denen ihr Erfinder Leibniz vor zweihundert Jahren seinen Gedanken gelehrten Freunden angekündigt hat. Und damit ist die Lehre von den Determinanten auch zu einem Hauptabschnitte der Propädeutik des höheren mathematischen Unterrichts geworden, denn von der näheren Bekanntschaft und der Leichtigkeit im Gebrauche dieses Werkzeuges hängt zu einem wesentlichen Theile für den Jünger der Wissenschaft ein leichtes und sicheres Fortschreiten ab.

Die vorliegende deutsche Ausgabe der „I determinanti“ Ernesto Pascals schliefst sich, abgesehen von mehreren umfänglichen Änderungen und Zusätzen des Herrn Verfassers, im Texte so eng, als thunlich schien, der Urschrift an. Text und Literaturberichte habe ich durchgearbeitet und insonderheit den letzteren eine aufmerksame Prüfung zu Theil werden lassen. Mir schwebte dabei lange Zeit als Ziel vor, der Leser solle in dem Buche wenn auch nur anhangweise die gesammte erreichbare Determinantenliteratur vorfinden, nach Stoffen geordnet und mit kurzen inhaltlichen Vermerken versehen. Meine dahin gehenden bibliographischen Bemühungen konnte ich jedoch bisher nicht abschliessen und ein Anhang, der nicht in diesem organischen Zusammenhange mit dem abhandelnden Texte des Buches stünde, scheint mir neben den von Anderen gegebenen, chronologisch geordneten Literaturübersichten entbehrlich. Ich hoffe, dass es mir möglich sein wird, meine Vorarbeiten bald zu Ende zu führen und in einer besonderen Veröffentlichung vorzulegen. Überdiess bietet sich dem, der den angezeigten Quellen nachgeht und die zum Vergleiche aufgeführten Lehrbücher[1]) benutzt, von selbst der Zugang zu einer grossen Zahl von weiteren einschlägigen Aufsätzen. Bemerkt sei hier, dass Muir im Quarterly Journal of pure and applied mathematics, Bd. 18 (1882) [110—149] und Bd. 21 (1886) [299—320] eine „list of writings on determinants“ in zeitlicher Folge und eine „supplementary list“ gegeben hat, dass in den Jahrbüchern über die Fortschritte der Mathe-

1) Scott in A treatise on the theory of determinants (1880) nennt allein etwa 120 die Determinanten betreffende Abhandlungen, die hier nicht vorkommen.

matik, anfangend mit dem Jahre 1868, in der Revue semestrielle des publications mathématiques seit 1892 regelmässige Anzeigen über die neuesten Erscheinungen der Determinantenliteratur sich finden. Muir verzeichnet in seiner ersteren Veröffentlichung die Arbeiten aus der Zeit von 1693—1880 einschliesslich, er liefert in der zweiten einen Nachtrag und führt die Übersicht bis zum Jahre 1885 fort.

Dem Lernenden wird es in mancher Hinsicht förderlich sein, wenn er sich an Hand der vorliegenden Darstellung mit den Determinanten erst vertraut gemacht hat, auf Abschnitte des viel erwähnten Baltzerschen Buches zurückzugreifen. In letzterem sind in grösserer Breite gewisse Anwendungs- und Grenzgebiete unseres Stoffes behandelt, so beispielsweise Beziehungen zur Integration der linearen Differentialgleichungen § 9. 3—5, zu den linearen, insbesondere den orthogonalen Substitutionen § 14. 7—8, 10—14, zu den bilinearen und quadratischen Formen § 6. 5—9, § 7. 3—5 (Kroneckers Subdeterminantenformel), § 13, dann Anwendungen im Gebiete der Geometrie und zwar in § 15: Die Dreiecksfläche und das Tetraedervolum, in § 16: Produkte von Strecken, Dreiecken, Tetraedern, in § 17: Polygonometrische und polyedrometrische Relationen. An die von Baltzer zu Ende seines § 16 angezeigten Abhandlungen, insonderheit Frobenius, Anwendungen der Determinantentheorie auf die Geometrie des Maasses, Journ. f. Math. Bd. 79 (1875) [185—247] schliesst sich an Study, Über Distanzrelationen, Zeitschr. f. Math. Jahrg. 27 (1882) [140—159].

Was die Geschichte der Determinanten betrifft, so möchte ich, die Bemerkungen des Herrn Verfassers ergänzend, hier noch auf einen Aufsatz von C. I. Gerhardt aufmerksam machen, der unter dem Titel: Leibniz über die Determinanten sich findet in den Sitzungsberichten der Akademie der Wiss. zu Berlin. Jahrg. 1891. I. [407—423] und auf das umfangreiche Unternehmen von Muir: The theory of determinants in the historical order of its development. Part 1. Determinants in general, durchgeführt bis zum Jahre 1844 in einer Reihe von Aufsätzen in den Proceedings der Royal Society of Edinburgh vol. 13, 14, 15, 16 (1886—1890), gesondert erschienen unter gleichem Titel London (Macmillan 1890). (Vergleiche Fortschr. d. Math. Bd. 22. 1890. S. 41.)

Zum Schluss möchte ich den Leser bitten, im voraus die nachstehend verzeichneten Zusätze und Berichtigungen des Textes zu beachten, und auf die beiden anhangweise von mir gegebenen Verzeichnisse aufmerksam machen, aus deren einem die benutzten oder angeführten Quellen zu ersehen sind, während das zweite dem Überblick und theilweise der inneren Anordnung des Stoffes dienen will.

Herrn Professor E. Pascal spreche ich meinen aufrichtigen Dank aus für die Geneigtheit, mit der er mein Vorhaben der Übersetzung seines Werkes begrüsst und für die thätige Theilnahme, die er der Ausgabe durch Mittheilung von Zusätzen und Änderungen und mit Durchsicht der Korrekturbogen gewidmet hat. Desgleichen danke ich den Herren Professoren Beke, Engel, Gutzmer und Herrn Privatdozenten Dr. H. Grassmann für mancherlei Rathschläge und Förderung bei meiner Arbeit, Herrn Prof. Engel insonderheit für seine Mühewaltung bei Lesung der Korrekturen, der Verlagshandlung aber für ihre gefällige und thatkräftige Beförderung.

Halle-Giebichenstein, Pfingsten 1900.

Hermann Leitzmann.

Berichtigungen und Zusätze.

Als Zusatz zu S. 36 diene: Die Regel von Sarrus lautet ursprünglich wie folgt. Ist die Determinante der dritten Ordnung

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

vorgelegt, so bilde man durch Wiederholung der beiden ersten Spalten hinter der dritten das Schema:

$$\begin{array}{cccccc} \searrow & \searrow & \searrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow \\ & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ \swarrow & \swarrow & \swarrow & \searrow & \searrow & \searrow \end{array}$$

wobei durch die Pfeile sechs schiefe Schnittlinien angedeutet sind. Man verbinde die einer jeden zugehörenden Elemente unter einander durch Multiplikation und gebe den dadurch entstehenden sechs Gliedern das Zeichen + oder —, jenachdem die betreffende Schnittlinie von der Linken zur Rechten oder von der Rechten zur Linken geht.

Die im Text gegebene Anweisung zur Bildung der sechs Glieder weicht nur im Ausdruck ab.

S. 41 Zeile 8 lies $\varDelta$ statt $\varLambda$.

S. 55 Zeile 5 und 6 lies: der sich leicht auch auf den Fall nicht diagonaler Minoren ausdehnen lässt.

S. 71 Zeile 7 von unten ist anzufügen: = Cayley, Coll. math. pap. vol. 4. Cambridge 1891. S. 43 u. 53.

S. 114 Zeile 8 und 9 lies: knüpfen auch zwei Arbeiten von Siacci an.

S. 119 Zeile 3 lies: ferner statt nämlich.

S 169 ff. Hier wird der Leser an mehreren Stellen leicht die Bezeichnung Komplement durch das Attribut algebraisch ergänzen.

S. 185 Zeile 10 füge hinzu: (1868). — Ausserdem ist in diesem Literaturbericht aus Versehen ausgefallen und an gehöriger Stelle nachzutragen:

v. Szüts, Zur Theorie der kubischen Determinanten. Math Ber. aus Ung. Bd. 8 (1890) [199—217].

Verzeichniss der angeführten Zeitschriften.

Amer. Journ. — American Journal of pure and applied mathematics.
Ac. de Belg. Bull. — Bulletin de l'académie de Belgique.
Ann. soc. sc. Brux. — Annales de la société scientifique de Bruxelles.
Danske Forh. — Oversigt over det danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger.
Tidsskr. f. math. — Tidsskrift for mathematik (Tychsen).
Ak. Berlin Abh. — Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.
Akad. Berlin Monatsber. od. Ber. — Monatsberichte, Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin.
Math. Mitth. Sitzber. Berlin — Mathematische und naturwissenschaftliche Mittheilungen aus den Sitzungsberichten der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.
Ges. d. Wiss. Göttingen Abh. od. Nachr. — Abhandlungen, Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
Ges. d. Wiss. Leipzig. Ber. — Berichte über die Verhandlungen der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse.
Akad. München. Abh. — Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften.
Phys. Med. Soc. Erlangen. Ber. — Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen.
Journ. f. Math. — Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle).
Zeitschr. f. Math. — Zeitschrift für Mathematik und Physik (Schlömilch).
Arch. d. Math. — Archiv der Mathematik und Physik (Grunert).
M. A. (Math. Ann.) — Mathematische Annalen.
Act. math. — Acta mathematica.
Fortschr. d. Math. — Jahrbücher über die Fortschritte der Mathematik.
Bibl. Math. — Bibliotheca mathematica, Zeitschrift für Geschichte der Mathematik.
. . . — Annalen der Physik und Chemie (Wiedemann).
Phil. Trans. — Philosophical Transactions of the Royal Society of London.
Edinburgh Trans. — Transactions of the Royal Society of Edinburgh.
Phil. Mag. — The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science.
Mess. of math. — The Messenger of mathematics.
London Math. Soc. Proc. — Proceedings of the London mathematical Society.
Cambr. Dubl. math. Journ. — The Cambridge and Dublin mathematical Journal.
Qu. Journ. — The Quarterly Journal of pure and applied mathematics.
C. R. — Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris).
Journ. de l'éc. pol. — Journal de l'école polytechnique.
Ann. de l'éc. norm. — Annales scientifiques de l'école normale supérieure.
Journ. de math. — Journal de mathématiques pures et appliquées (Liouville).
Nouv. ann. (de math.) — Nouvelles annales de mathématiques.

Bull. sc. math. — Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques.
Bull. soc. math. de Fr. — Bulletin de la société mathématique de France.
Nouv. corr. math. — Nouvelle correspondance mathématique (Catalan, Mansion).
Acc. Linc. Mem. od. Rend. — Atti della R. Accademia dei Lincei, Memorie, Rendiconti della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.
Ist. Lomb. Mem. — Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di scienze matematiche e naturali.
Acc. di Tor. — Atti della R. Accademia delle scienze di Torino.
Atti Ist. Ven. — Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.
Mem. d. soc. ital. d. scienze — Memorie di matematica e di fisica della società italiana delle scienze.
. . . — Collectanea mathematica in memoriam Chelini.
Acc. Napoli Rend. — Rendiconti dell' Accademia di Napoli.
Atti Acc. Gioenia — Atti dell' Accademia Gioenia di scienze naturali. Catania.
Rend. Circ. mat. Pal. — Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.
Giorn. di Batt. — Giornale di matematiche (Battaglini).
Ann. da Tort. — Annali di scienze matematiche e fisiche compilati da Tortolini.
Ann. di mat. — Annali di matematica.
Riv. di mat. — Rivista di matematica (Peano).
Bull. di bibl. e di stor. Bonc. — Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da Boncompagni.
Akad. Wien. Denkschr. od. Ber. — Denkschriften, Sitzungsberichte der Kais. Akademie der Wissenschaften zu Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse.
Böhm. Ges. Ber. — Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag.
Budapest Értek. — Értekezések a mathematikai tudományok köréből. Budapest. (Abhandlungen aus dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften.)
Math. Ber. aus Ung. — Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn.
. . . — Müegyetemi Lapok (Polytechnische Blätter).
Monatsh. f. Math. — Monatshefte für Mathematik und Physik.
Jorn. de sc. math. — Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas (Teixeira).
Lunds Univ. Årsskr. od. Act. Univ. Lund. — Lunds Universitets Årsskrift = Acta Universitatis Lundensis.
Stockh. Vet. Ak. Förh. — Öfversigt af Kongl. Vetenskaps Akademiens Förhandlingar.

Inhaltsverzeichniss.

Seite

Vorwort des Verfassers III
Vorbemerkung des Herausgebers IV
Berichtigungen und Zusätze VIII
Verzeichniss der angeführten Zeitschriften IX
Abriss der geschichtlichen Entwicklung der Determinantenlehre XIV

Erster Theil.
Grundlagen des Rechnens mit Determinanten.

§ 1. Grundlegende Erklärungen 1
§ 2. Verschiedene Bemerkungen über Determinanten und deren wesentliche Eigenschaften 3
§ 3. Unterdeterminanten oder Minoren 11
§ 4. Entwicklung einer Determinante nach Determinanten niedrigerer Ordnung 14
§ 5. Eigenschaften der Minoren einer Determinante 18
§ 6. Multiplikation zweier Determinanten 21
§ 7. Die Produktdeterminante zweier rechteckiger Matrices 26
§ 8. Reziproke Determinanten 31

Zweiter Theil.
Besondere Untersuchungen über Determinanten und Anwendungen.

§ 9. Andere Methoden für die Entwicklung einer Determinante. Die Regel von Laplace 36
§ 10. Umwandlung einer Determinante 38
§ 11. Potenz-Entwicklung einer Determinante nach besonderen in ihr vorkommenden Grössen 41
§ 12. Entwicklung der geränderten Determinanten. Darstellung einer Determinante durch die Elemente einer Zeile und einer Spalte 43
§ 13. Anzahl der Glieder, die besondere Elemente enthalten 45
§ 14. Die Abgeleitete einer Determinante. Determinanten von Wronski . 47
§ 15. Eigenschaften der Minoren, welche der Produktdeterminante aus zwei gegebenen angehören 50
§ 16. Symmetrische, schiefe, halbsymmetrische Determinanten 55
§ 17. Pfaffsche Funktionen 60

Seite

§ 18. Lehrsätze über symmetrische und über schiefe Determinanten . . . 64
§ 19. Die Determinanten Hankels und mit ihnen verwandte 67
§ 20. Zyklische Determinanten 71
§ 21. Determinanten von Puchta und Noether 79
§ 22—24. Über Determinanten, die aus Minoren einer andern gebildet sind
§ 22. Lehrsätze von Spottiswoode (Sylvester) und Franke 83
§ 23. Weitere Lehrsätze: von Sylvester, D'Ovidio und Anderen. 91
§ 24. Die allgemeinere Aufgabe Sylvesters 95
§ 25. Neue Untersuchungen von Netto und von Pascal 97
§ 26. Lehrsatz von Scholtz (Hunyady) 103
§ 27. 28. Determinanten, deren Elemente aus den Elementen zweier gegebener Determinanten gebildet sind.
§ 27. Kroneckers Lehrsatz 107
§ 28. Lehrsätze von Picquet, von Sylvester und Anderen 109
§ 29—31. Beziehungen zwischen den Determinanten, die in einer Matrix enthalten sind.
§ 29. Untersuchung von Vahlen 115
§ 30. Formel von Netto, eine verwandte von Pascal. 118
§ 31. Grundform der Beziehungen zwischen den Determinanten einer Matrix 121
§ 32. Beziehungen zwischen den Determinanten, die aus denselben Elementen gebildet sind 124
§ 33—45. Berechnung von Determinanten mit besonderen Elementen.
§ 33. Die Determinante von Vandermonde oder Cauchy und ihre Verallgemeinerung 128
§ 34. Determinanten, die aus Binomialkoeffizienten gebildet sind. Determinante von Zeipel 132
§ 35. Die Zahlen Bernoullis und Eulers, durch Determinanten dargestellt 136
§ 36. Determinanten, aus Fakultäten gebildet 137
§ 37. Determinanten aus Wurzeln der Einheit, besondere Systeme 138
§ 38. Eine ganze Funktion von x wird in der Form einer Determinante ausgedrückt 143
§ 39. Die Summen gleicher Potenzen der Wurzeln in der Form von Determinanten 145
§ 40. Determinanten, die von dem Werthe gewisser Elemente unabhängig sind 146
§ 41. Determinanten gebrochener Funktionen. 146
§ 42. Die Determinante von Smith 147
§ 43. Determinanten aus Differenzen. 149
§ 44. Besondere zyklische Determinanten. 150
§ 45. Determinanten der Kettenbrüche. Kontinuanten 151
§ 46—50. Über die Determinanten der orthogonalen Substitutionen.
§ 46. Allgemeine Eigenschaften 157
§ 47. Die Aufgabe von Cayley 159
§ 48. Der Lehrsatz von Brioschi. 165
§ 49. Lehrsätze von Siacci 168
§ 50. Lehrsatz von Stieltjes. 173

Seite

§ 51. Determinanten, deren Ordnung unendlich ist 175
§ 52. Über geränderte Determinanten. Lehrsatz von Le Paige 178
§ 53. Maximalwerth einer Determinante. Untersuchung von Hadamard. . 180
§ 54. Kubische Determinanten und solche, deren Elemente von mehreren Indices abhängen 184
§ 55. Determinanten und Matrices, die verschwinden. Rang einer Matrix. 192
§ 56. Lineare Gleichungen 197
§ 57. Die Resultante zweier Gleichungen. Die Diskriminante einer Gleichung 206
§ 58. Allgemeine Eigenschaften der Funktionaldeterminanten. Lehrsätze von Jacobi 222
§ 59. Lehrsätze, die sich auf den Fall beziehen, wo die Funktionen sich in Faktoren spalten 227
§ 60. Umwandlung eines vielfachen Integrales 232
§ 61. Systeme von Jacobischen Determinanten aus ($n + 1$) Funktionen von n Veränderlichen. Tangentenkoordinaten. Jacobische Determinanten von Jacobischen Determinanten. Lehrsatz von Clebsch 236
§ 62. Systeme Jacobischer Determinanten von n Funktionen ($n + 1$) Veränderlicher 239
§ 63. Die Jacobische Determinante dreier Kurven 241
§ 64. Hessesche Determinanten. Wendepunkte der Kurven. Krümmung der Oberflächen 244
§ 65. Weitere Untersuchungen über die Hesseschen Determinanten 249
Verzeichniss der Literaturnachweise 255
Sachregister 258

Abriss der geschichtlichen Entwicklung der Determinantenlehre.

Erst um die Mitte des Jahrhunderts hat sich die Lehre von den Determinanten zu dem systematischen Gebilde eines Wissenschaftszweiges verdichtet. Jedoch hatte auch sie, wie alle Lehrbegriffe, ihre entfernten Vorläufer und ihre Entwicklung nahm einen langsamen Verlauf.

Wie dies auch bei anderen Lehrgebieten begegnet, wie zum Beispiel die Variationsrechnung bekanntermassen bei Gelegenheit des berühmten Problems der Brachistochrone ihre Entstehung fand, so begann auch die Beschäftigung mit Determinanten aus Anlass einer bestimmten Aufgabe; und dies war die Elimination der Unbekannten aus linearen Gleichungen.

Zuerst nahm Leibniz den Vortheil wahr, der sich bei der Elimination eines Systems von linearen Gleichungen dadurch gewinnen liess, dass man als Koeffizienten „des nombres au lieu de lettres", wie er selbst sich ausdrückt, benutzte. Und er verstand hierunter im Grunde das Verfahren, Zahlen nicht als Grössen, sondern als Indices zu verwenden, bei deren angemessener Vertauschung er voraus ahnte, von einem Glied der Eliminante zum anderen übergehen zu können. Aufzeichnungen von Leibniz, in denen er diese Gedanken angedeutet und benutzt hat, sind: ein Brief an seinen Freund L'Hospital vom 28. April 1693, eine Mittheilung an ihn über die Methode der Tangenten, Ende 1694, und eine Abhandlung in den Acta Eruditorum vom Jahre 1700 (Responsio ad Dn. Nic. Fatii Duillierii imputationes).

Die Schriftsteller nach Leibniz, welche denselben Gedankengang befolgten, waren der Ordnung der Zeit nach: Cramer (Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, Genève 1750), der die Regel zur Bildung des Ausdrucks der Wurzeln eines Systems linearer Gleichungen fand, Bezout (Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues. Hist. de l'académie de Paris 1764), Laplace (Recherches sur le calcul intégral etc. Hist. de l'acad. de Paris 1772), der eine andere Bezeichnungsweise anwandte, indem er nämlich einen Zahlenindex in der Höhe

zur Linken jedes Buchstaben setzte, Vandermonde (Mémoire sur l'élimination, Hist. de l'acad. de Paris 1772), der noch eine weitere verschiedene Bezeichnung benutzte, die in ihrer Anwendung zu symbolischer Darstellung einer Determinante an die sogenannte „umbral notation" von Sylvester erinnert.

Lagrange kam bei seinen Untersuchungen über die Rotationsbewegung eines Körpers und über die Anziehung der Sphäroïde (Mém. de Berlin 1773) auf gewisse Bildungen, die Determinanten dritter Ordnung sind. Es gelang ihm, einige grundlegende Eigenschaften derselben aufzudecken, der Art, wie wir sie jetzt von den sogenannten reziproken Determinanten aussprechen, und in denselben Gedankengang trat ein wenig später Gauss ein, indem er binäre und ternäre quadratische Formen und deren Transformationen behandelte. Die Diskriminante einer solchen Form wurde von Gauss „Determinante" genannt und hier fand der Name seinen Ursprung, der danach in der Folge stets gebraucht worden ist.

Aber Cauchy war der Ruhm vorbehalten, das Erbe seiner Vorgänger zusammen zu fassen und einen so ansehnlichen Beitrag dazu zu liefern, dass er gewissermassen der wahre Begründer der Determinantenlehre geworden ist.

Ausgangspunkt für diesen mathematischen Genius war die Theorie der alternierenden Funktionen in einer Abhandlung vom Jahre 1812 (Journal de l'école polytechnique, Cah. 17. 1815). In dieser Abhandlung stellte der Verfasser in allgemeiner Form alle grundlegenden Eigenschaften der Determinanten n-ter Ordnung auf, die Regeln für die Entwicklung, die Eigenschaften der Reziproken, die er Adjunkte nannte, die Anweisung für die Multiplikation zweier Determinanten, und mehreres Andere. Indem er einem schon von Gauss für besondere Fälle gegebenen Beispiele folgte, begann er auch damit, die n^2 Elemente der Determinante in einer quadratischen Matrix anzuordnen, doch benutzte er sehr viel öfter die Darstellung durch das andere Symbol $S(\pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn})$.

Was jedoch die Regel für die Multiplikation anlangt, so haben wir zu bemerken, dass diese auf einem verschiedenen Wege gleichzeitig auch von Binet gefunden worden war und veröffentlicht in einer Arbeit, die abgedruckt steht im vorausgehenden (16.) Heft des Journal de l'école polytechnique. Deshalb wird diese Anweisung auch von Einigen die Regel von Binet genannt.

Die Lehre von den Determinanten war somit in ihren wesentlichsten Punkten abschliessend begründet, doch blieb sie noch 25 Jahre unbeachtet, bis 1841 die berühmten Abhandlungen von Jacobi (Crelles

Journal Bd. 22) erschienen: De formatione et proprietatibus determinantium und De determinantibus functionalibus, die die Aufmerksamkeit der Mathematiker wiederum auf die Wichtigkeit dieses Lehrbegriffs lenkten und auf die Vortheile, die sich mit seiner Hilfe für andere Zweige der Analysis und der Geometrie erwarten liessen. Auf die Abhandlungen Jacobis folgten zwei andere Einzeldarstellungen, eine von Cayley (Transactions of the Cambridge Phil. Soc. vol. 8 (1849) Part I) und die andere von Spottiswoode (Crelles Journal Bd. 51) und danach kamen zum Schluss systematische Schriften. Die erste vollständige Bearbeitung dieser Art war die von Brioschi (Pavia 1854), der die von Baltzer (Leipzig 1857) und von Trudi (Napoli 1862) folgten. Von Baltzers Werke hat man noch vier weitere Auflagen (1864, 1870, 1875, 1881) und eine Übertragung ins Französische zu verzeichnen, von Brioschi eine französische und eine deutsche Übersetzung.

Von den neueren Schriften wollen wir anführen die von Studnička (Prag 1871, 2. Aufl. 1899), von Hoüel (Paris 1871), von Hesse (Leipzig 1872), von Dölp (Darmstadt 1874), von Mansion (Éléments Paris 1875, Introduction. Gand 1876, von beiden neueste deutsche Ausgaben: Leipzig 1900 und 1899), von Günther (2. Aufl., Erlangen 1877), von Dostor (Paris 1877), von Scott (Cambridge 1880), von Muir (London 1882), von Gordan (1. Bd. der Vorlesungen über Invariantentheorie. Leipzig 1885).

Das Buch von Günther enthält ausführliche bibliographische Anzeigen für jeden Theil des Lehrgebietes und eine historische Übersicht über seine Entwicklung. Diese Darstellung, sowie die schätzbaren Abhandlungen von Studnička (Über die Entwicklung des Determinantenbegriffs, Prag 1876 und Aug. Cauchy als formaler Begründer der Determinantentheorie, Prag 1876) sind zur Abfassung dieser wenigen geschichtlichen Angaben benutzt worden.

Erster Theil.

Grundlagen des Rechnens mit Determinanten.

§ 1. Grundlegende Erklärungen.

Es sei n eine ganze, positive Zahl, und eine Anzahl von n^2 Grössen gegeben. Die Buchstaben zur Bezeichnung dieser Grössen sollen in dem Raum eines Quadrates vertheilt werden, indem man auf einer ersten Zeile n von ihnen anordnet, auf einer zweiten Zeile und zwar spaltenweise den vorausgehenden zugeordnet wiederum n derselben und so fortfährt, bis man die n-te Zeile gebildet hat.

Um in den weiteren Betrachtungen desto leichter und von einem gewissen Ebenmaass begünstigt vorwärts schreiten zu können, erscheint es von Vortheil, die gedachten n^2 gegebenen Grössen auf eine bestimmte Weise darzustellen. Wir werden im Besonderen mit a_{rs} diejenige unter ihnen bezeichnen, welche bei der Anordnung im quadratischen Schema die s-te Stelle auf der r-ten Zeile einzunehmen haben wird.

Das Quadrat wird dann diese Gestaltung aufweisen:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}$$

Wir nennen die Grössen a die Elemente des Quadrates.

Wir wollen nun von diesen Elementen n hervorheben, und zwar sollen sie der Art ausgewählt sein, dass keinesfalls zwei von ihnen derselben Zeile oder derselben Spalte angehören. Diese n Elemente wollen wir zu einem Produkt verbinden. Prüfen wir, auf wievielfach verschiedene Weise wir ein solches Produkt bilden können. Erstlich leuchtet vor Allem ein, dass die n Zeilen sämmtlich werden vertreten

sein, da man n Elemente zu wählen hat und nicht zwei unter ihnen derselben Zeile angehören dürfen. Mit anderen Worten: es wird unter den n Zeilen keine sein, der nicht eines und eben ein einziges von den ausgewählten Elementen angehört; und dasselbe kann man für die n Spalten behaupten.

Wir können jetzt diese n Elemente in der Weise ordnen, dass das erste von ihnen ein der ersten Zeile angehöriges Element ist, das zweite der zweiten Zeile zugehört, ... das n-te aus der n-ten Zeile herrührt. Es wird dann das Produkt der ausgewählten n Elemente

$$a_{1r_1} a_{2r_2} \dots a_{nr_n}$$

sein, wo $(r_1 r_2 \dots r_n)$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \dots n$ vorstellt. Die Frage: Wie viele, von einander verschiedene, Produkte dieser Art lassen sich bilden? entspricht genau der andern Frage: Wieviel Permutationen $(r_1 r_2 \dots r_n)$ sind mit den Elementen der Zahlenreihe $(1, 2, \dots n)$ möglich? Bekanntlich wird diese Anzahl dargestellt durch $n!$ und daraus lässt sich schliessen, dass man $n!$ Produkte der vorbezeichneten Art bilden kann.

Man versehe nun jedes derartige Produkt mit einem Vorzeichen, und zwar mit dem Zeichen $+$ oder $-$, jenachdem die Permutation der Indices $(r_1 r_2 \dots r_n)$ eine gerade oder ungerade Permutation ist. Wie man aus der Lehre von den Kombinationen weiss, werden dann hier $\frac{1}{2}(n!)$ Produkte mit dem Zeichen $+$ und eben soviele mit dem Zeichen $-$ auftreten.

Die algebraische Summe aller so gebildeten Produkte mit den ihnen zugehörigen Vorzeichen nennt man die Determinante der n^2 gegebenen Grössen.

Einer durch Cayley eingeführten Bezeichnungsweise gemäss pflegt man die Determinante mit dem Symbol

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

darzustellen oder auch, Cauchy zufolge, durch:

$$\sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

Man nennt die Zahl n die Ordnung der Determinante.

Es lässt sich leicht bemerken, dass alle Glieder der Determinante aus dem einen

$$a_{11}\ a_{22} \dots a_{nn}$$

hervorgehen, wenn man die ersten Indices unberührt lässt, die zweiten Indices auf jede mögliche Weise ändert und dabei jedem Gliede das passende Vorzeichen nach der hiefür aufgestellten Regel zutheilt.

Die Gesammtheit der n^2 Elemente, wie sie in dem quadratischen Schema vertheilt sind, pflegt man eine quadratische Matrix zu nennen.

Die Elemente, deren beide Indices einander gleich sind, wie $a_{11}, a_{22}, \ldots$ heissen gewöhnlich die Hauptelemente, und die diagonale Gerade des Quadrats, welche der eingeführten Bezeichnungsweise zufolge eben diese Elemente enthält, pflegt man die Hauptdiagonale zu nennen. Die andere Diagonale des Quadrates führt den Namen der zweiten Diagonale.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + \\ + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{cases}$$

§ 2. Verschiedene Bemerkungen über Determinanten und deren wesentliche Eigenschaften.

Wir gehen dazu über, einige Eigenschaften der Determinanten darzulegen, die sich unmittelbar aus der begrifflichen Erklärung herleiten lassen.

1. Setzen wir eine Determinante voraus, in der sämmtliche Elemente, abgesehen von den der Hauptdiagonale angehörenden, Null sind:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Der Werth solcher Determinante ist gleich dem Produkte der Elemente der Hauptdiagonale mit positivem Vorzeichen.

Wenn dem entsprechend in einer Determinante alle Elemente mit Ausnahme derer der zweiten Diagonale Null sind, so ist diese Determinante gleich dem Produkte aller in der zweiten Diagonale enthaltenen Elemente, multipliziert mit dem zur Potenz $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ erhobenen Faktor (-1).

Es wird nämlich dann die Determinante augenscheinlich auf das einzige Glied eingeschränkt:

$$a_{1,n}\, a_{2,n-1} \dots a_{n,1}.$$

Das Zeichen desselben wird nach der Anzahl der Inversionen bestimmt, welche in der Permutation

$$(n,\, n-1,\, n-2 \dots 1)$$

enthalten sind. Dies sind genau $\frac{1}{2} n\, (n-1)$.

Ganz dieselben Ergebnisse gewinnt man, wenn in einer Determinante nur alle Elemente Null sind, die auf einer Seite der Hauptdiagonale oder der zweiten Diagonale sich befinden.

Und so erhellt auch der Satz:

Wenn in einer Determinante alle Elemente einer Reihe (Zeile oder Spalte) verschwinden, so ist die Determinante selbst Null.

Denn jedes Glied der Determinante soll stets ein Element dieser Reihe als Faktor enthalten, folglich wird jedes beliebige Glied Null sein.

2. Wir haben die verschiedenen Faktoren jedes Gliedes der Determinante in der Weise angeordnet, dass ihre ersten Indices die Zahlen 1, 2, ... n in ihrer natürlichen Folge darstellen.

Das Vorzeichen, welches dem Gliede dann zukommt, ist ein $+$ oder ein $-$, jenachdem in der Permutation $(r_1\, r_2 \dots r_n)$ der zweiten Indices eine gerade oder ungerade Anzahl von Inversionen enthalten ist.

Wir wollen nun annehmen, es werde die Anordnung der Faktoren eines Gliedes auf beliebige Weise verändert und man habe somit aus dem Gliede

$$a_{1 r_1}\, a_{2 r_2} \dots a_{n r_n}$$

das Glied

$$a_{s_1 t_1}\, a_{s_2 t_2} \dots a_{s_n t_n}$$

erhalten, wobei:

$$(s_1\, s_2 \dots s_n),\ (t_1\, t_2 \dots t_n)$$

zwei Permutationen der Zahlen 1, 2, ... n vorstellen.

Bedenken wir, nach welcher Regel man das Zeichen dieses Gliedes, wenn es in der letzteren Ausdrucksform auftritt, zu finden haben wird.

Um von der ersten zur zweiten Form überzugehen, benutzen wir eine gewisse Substitution mit Bezug auf die Elemente a oder, was damit übereinkommt, wir wenden auf die ersten Indices eine Substitution an und eine ähnliche Substitution auf die zweiten Indices.

Man kann nun jede Substitution auf eine gewisse Anzahl von Transpositionen (Vertauschungen zweier Elemente) zurückführen, und jede Transposition lässt die Anzahl der Inversionen um eine ungerade Zahl sich ändern. Wenn demnach die Substitution, die ich an den Elementen vornehmen will, m Transpositionen entspricht, so wird das folgende Verhalten ersichtlich: die Anzahl s der in der Permutation $(s_1\, s_2 \ldots s_n)$ enthaltenen Inversionen, vermindert um die Zahl der zur Permutation $(1, 2, \ldots n)$ gehörigen Inversionen (und diese letztere Zahl ist Null) setzt sich zu m Malen aus einer ungeraden Zahl zusammen; und so besteht auch die Differenz zwischen der Anzahl t der Inversionen von $(t_1\, t_2 \ldots t_n)$ und derjenigen der $(r_1\, r_2 \ldots r_n)$, nämlich r, m mal aus einer ungeraden Zahl. Es wird also:

$$s = m\,(2A + 1)$$

$$t - r = m\,(2B + 1)$$

und daraus folgt:

$$s + t = r + (\text{gerade Zahl})$$

Also sind die in $(r_1\, r_2 \ldots r_n)$ enthaltenen Inversionen gerade oder ungerade, jenachdem die Summe der Inversionen von $(s_1\ s_2 \ldots s_n)$ und $(t_1\, t_2 \ldots t_n)$ gerade oder ungerade ausfällt.

Wir wollen daraus entnehmen, dass man, um das Zeichen unseres Gliedes unter der Form:

$$a_{s_1 t_1}\, a_{s_2 t_2} \ldots a_{s_n t_n}$$

festzustellen, nur zu beachten hat, ob die Summe der Inversionen gerade oder ungerade ist, die in der Permutation der ersten Indices und in derjenigen der zweiten vorkommen.

Auf diese Weise erscheint die begriffliche Bestimmung der Determinante nun unabhängig von der Anordnung, nach der man sich innerhalb jedes Gliedes die Faktoren vertheilt denken möchte, es wird damit jene einschränkende Voraussetzung bestimmter Folge der Faktoren wieder aufgehoben, welche wir um der grösseren Einfachheit und Deutlichkeit willen im vorigen Paragraphen unserer Darstellung auferlegt hatten.

3. Wenn man in einer Determinante die Zeilen mit den Spalten vertauscht, oder mit andern Worten, wenn man in der ersten Spalte die Elemente anordnet, die die erste Zeile bildeten, in der zweiten Spalte die Elemente der zweiten Zeile und so weiter, erhält man eine neue und der ursprünglichen gleichwerthige Determinante.

Denn, nehmen wir

$$a_{1r_1}\, a_{2r_2} \ldots a_{nr_n}$$

als ein Glied der ursprünglichen Determinante an, so ist dies augenfällig, abgesehen vom Vorzeichen, auch ein Glied der neuen Determinante. Nur stellen jetzt, wenn man die a als Elemente der neuen Determinante betrachtet, die ersten Indices nicht mehr die Ordnungszahl der Zeile vor, welcher das einzelne Element zugehört, sondern der Spalte und ebenso wird der zweite Index im Gegensatz gegen die frühere Auffassung des Gliedes die Ordnungszahl der Zeile sein. Das oben bezeichnete Glied, zugehörig gedacht zur Entwicklung der zweiten Determinante, wird das Zeichen $+$ oder $-$ erhalten müssen, jenachdem die Summe der Inversionen, die in den beiden Permutationen der ersten und der zweiten Indices vorkommen, gerade oder ungerade ist. Nun ist offenbar diese Zahl dieselbe, wie die der Inversionen innerhalb der Permutation $(r_1\, r_2 \ldots r_n)$ allein, und daher ist das Zeichen, womit man dies Glied als der zweiten Determinante angehörig zu versehen hat, ganz dasselbe, mit dem man es auch als Glied der ursprünglichen Determinante auszuzeichnen hatte.

Da man die nämliche Betrachtung bei jedem einzelnen Gliede wiederholen kann, so erscheint die Richtigkeit der Behauptung einleuchtend.

4. Wenn man in einer Determinante zwei parallele Reihen mit einander vertauscht, so erhält man eine neue Determinante, die der ursprünglichen gleich und im Zeichen entgegengesetzt ist.

Offenbar ist, abgesehen vom Zeichen, ein Glied der ursprünglichen Determinante auch ein Glied der neuen und umgekehrt.

Zudem, wenn

$$a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \ldots$$

ein Glied der Determinante vorstellt, und die Indices der Stellen, welche $a, b, c \ldots$ in der alten Determinante einnahmen, beziehungsweise

$$\begin{matrix} s_1 & r_1 \\ s_2 & r_2 \\ \cdot & \cdot \\ s_n & r_n \end{matrix}$$

sind, so werden die Indices, die den Elementen desselben Gliedes innerhalb der neuen Determinante zukommen, in ihrer Gesammtheit durchaus dieselben sein, aber wohl zu bemerken ist, dass unter ihnen ein Wechsel eintrat zweier s oder zweier r, jenachdem wir zwei Zeilen

oder zwei Spalten mit einander vertauscht haben. Daher wird die Summe der Zahlen, welche die in beiden Permutationen, der s und der r, bestehenden Inversionen angeben, um eine ungerade Zahl vermehrt oder vermindert sein, und darum hat man in der neuen Determinante demselben Gliede das entgegengesetzte Zeichen zuzutheilen wie in der ersten.

5. Aus dem vorangehenden Lehrsatze leitet man leicht diesen weiteren ab:

Wenn in einer Determinante zwei parallele Reihen identisch übereinstimmen, so ist die Determinante Null.

Wirklich wird ja die Determinante D, wenn man die beiden Reihen unter einander vertauscht, ihr Zeichen wechseln müssen, aus D wird $-D$ werden. Aber andrerseits bleibt die Determinante dieselbe wie zuerst, da doch die beiden Reihen übereinstimmen. In Folge dessen ist $D = -D$ und mithin $D = 0$.

6. Wenn die Elemente einer Reihe mit ein und derselben Zahl k multipliziert werden, so erscheint die ganze Determinante mit k multipliziert.

Es wird nämlich hiebei jedes Glied der Entwicklung, da es stets eines und nur eines der Elemente jener Reihe enthält, mit k multipliziert sein.

7. Eine Determinante wird nicht geändert, wenn man das Zeichen bei allen den Elementen wechselt, welche ungerade Stellen inne haben. Wir verstehen hier unter ungeraden Stellen diejenigen, bei denen die Summe der Indices eine ungerade Zahl ist.

Gedachtes Verfahren ist doch in Wirklichkeit gleichbedeutend damit, die 2-te, 4-te, ... Zeile und überdies auch die 2-te, 4-te, ... Spalte mit (-1) zu multiplizieren. So zum Beispiel würde werden:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & -b_1 & c_1 \\ -a_2 & b_2 & -c_2 \\ a_3 & -b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Dem entsprechend und noch allgemeiner gilt der Satz:

Eine Determinante ändert sich nicht, wenn jedes a_{ik} mit p^{i-k} multipliziert wird, wobei man unter p eine beliebige Zahl versteht.

8. Eine Determinante ist Null, wenn die Elemente einer

Reihe die gleichen Vielfachen der Elemente einer parallelen Reihe sind.

Sind nämlich die Elemente einer Reihe gleich denjenigen einer andern, wenn diese mit k multipliziert gedacht werden, so erhält man, wenn man die Elemente dieser letzteren Reihe mit k multipliziert, eine Determinante mit zwei parallelen, identischen Reihen, die demzufolge Null ist. Inzwischen ist solche, durch Multiplikation abgeleitete Determinante, gerade der ursprünglichen und mit k multiplizierten Determinante gleich.

9. Wir wollen voraussetzen, dass die Elemente einer Reihe zusammengesetzte Ausdrücke von gleicher Gliederzahl sind. Es sei also eine Determinante von folgender Gestalt gegeben:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} + c_{11} + \cdots, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21} + b_{21} + c_{21} + \cdots, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} + b_{n1} + c_{n1} + \cdots, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

In jedem Gliede der Entwicklung wird sich hier immer als Faktor ein Element der ersten Spalte finden; das heisst, ein Glied der Entwicklung wird im Allgemeinen die Form haben:

$$(a_{i1} + b_{i1} + c_{i1} + \cdots) A$$

und dabei A ein Produkt von $(n - 1)$ Elementen vorstellen, die aus den übrigen Spalten ausgewählt sind und den übrigen Zeilen (ausgeschlossen bleibt die i-te Zeile sowie die erste Spalte).

Nun ist dies Glied:

$$a_{i1}A + b_{i1}A + c_{i1}A + \cdots$$

und die Determinante wird sein:

$$\sum \pm a_{i1}A + \sum \pm b_{i1}A + \cdots$$

wobei das Zeichen jedes Gliedes nach der gewöhnlichen Regel bestimmt wird. Der erste Theil des betreffenden Ausdruckes ist nichts andres, als die gegebene Determinante für den Fall, dass an Stelle der Elemente der ersten Spalte einzig die:

$$a_{11}\, a_{21} \cdots a_{n1}$$

belassen sind; der zweite Theil dem entsprechend führt uns auf die gegebene Determinante zurück, nur dass in dieser an Stelle der Elemente der ersten Spalte die:

$$b_{11}\, b_{21} \cdots b_{n1}$$

eingesetzt werden, und so des Weiteren. Wir können schliessen, dass die vorgelegte Determinante der Summe einer gewissen Anzahl von Determinanten gleich ist, die alle aus der gegebenen in der angezeigten Weise zu bilden sind.

Eine Determinante, in der die Elemente einer Reihe zusammengesetzte Ausdrücke sind, ist gleich einer Summe von Determinanten, bei welchen jene Elemente einfache sind.

Sind die Elemente der betreffenden Reihe aus r Gliedern zusammengesetzt, so werden gemäss dem geschilderten Verfahren der Zerlegung r Theildeterminanten entstehen. Diese werden in den übrigen Reihen völlig mit der gegebenen Determinante übereinstimmen, der Reihe der r-gliedrigen Elemente dort wird aber jede von ihnen noch eine Reihe mit gleichstelligen Gliedern der gedachten Elemente entlehnen.

Wenn wir nun annehmen, dass in der vorgelegten Determinante auch die Elemente der anderen Reihen (Zeilen oder Spalten) vielgliedrige Ausdrücke sind, so wird man durch Wiederholung desselben Verfahrens mit Bezug auf jede der schon erhaltenen Theildeterminanten schliesslich auf eine Summe von Determinanten geführt werden, in denen nur eingliedrige Elemente vorkommen. Dabei wird erforderlich, alle die ersten, zweiten ... Glieder der Elemente etwa der ersten Spalte auf alle möglichen Arten mit denjenigen in der zweiten, dritten ... Spalte zu verbinden. Ist jedes Element ein zusammengesetzter Ausdruck in r Gliedern, so wird man im Ganzen aus der ursprünglichen Determinante n-ter Ordnung r^n Theildeterminanten mit einfachen Elementen erhalten.

Zum Beispiel diene:

$$\begin{vmatrix} a+a', & b+b' \\ c+c', & d+d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a', & b \\ c', & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a, & b' \\ c, & d' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a', & b' \\ c', & d' \end{vmatrix}$$

Es ist von Vortheil, zu beachten, dass, wenn einige Elemente nicht gerade r-gliedrige Polynome sind, sondern aus einer geringeren Zahl von Gliedern bestehen, um dann doch denselben Satz anwenden zu können, man sie als r-gliedrige betrachten darf, indem man nur die erforderliche Anzahl von Gliedern mit Null ergänzt. Man erhält dann Theildeterminanten, bei denen einzelne Elemente Null sind.

10. Eine Determinante ändert sich nicht, wenn man den Elementen einer Reihe diejenigen einer parallelen Reihe, multipliziert mit einer beliebigen Zahl, hinzufügt.

Wir bilden im besonderen Falle aus der Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

diese andere:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} + ka_{22}, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} + ka_{n2}, & a_{n2}, & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Wenn wir nach dem vorausgehenden Lehrsatz bei dieser letzten Determinante die Zerlegung der binomischen Elemente der ersten Spalte vornehmen, so erscheint die ursprüngliche Determinante wieder und dazu tritt eine andre Determinante, in welcher die Elemente der ersten Spalte gleich sind denen der zweiten, multipliziert mit k, und die darum Null ist.

11. Wenn in einer Determinante die Elemente einer Reihe die nämlichen linearen Verbindungen der Elemente paralleler Reihen darstellen, so ist die Determinante Null.

Wenn in der Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

sich findet:

$$\begin{aligned} a_{11} &= ka_{12} + ha_{13} + la_{14} + \cdots \\ a_{21} &= ka_{22} + ha_{23} + la_{24} + \cdots \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \\ a_{n1} &= ka_{n2} + ha_{n3} + la_{n4} + \cdots \end{aligned}$$

so wird nach der Zerlegung in die entsprechende Anzahl Determinanten mit eingliedrigen Elementen eine jede von diesen als verschwindend sich herausstellen, weil sie in einer Reihe Elemente enthalten wird, welche die gleichen Vielfachen zu denen einer parallelen Reihe sind.

Auch die Umkehrung dieses Lehrsatzes ist giltig, wie bei einer anderen Gelegenheit gezeigt werden soll. (Im § 55.)

§ 3. Unterdeterminanten oder Minoren.

Nach Darstellung einiger grundlegender Eigenschaften, die sich unmittelbar aus der begrifflichen Erklärung der Determinante ergeben, liegt es uns ob, die Mittel in Erwägung zu nehmen, mit denen man in noch einfacherer Weise eine Determinante berechnen kann.

Wir werden uns dabei durch den Gedanken leiten lassen, die Berechnung einer Determinante von gewisser Ordnung n auf die Berechnung anderer Determinanten niedrigerer Ordnung zurückzuführen.

Wir haben aus diesem Grunde die Lehre von den sogenannten Unterdeterminanten vorauszuschicken.

Denken wir uns eine Determinante der Ordnung n vorgelegt. In ihr wollen wir m nach Belieben gewählte Zeilen und desgleichen m Spalten unterdrücken. Es bleibt dann eine Determinante von der Ordnung $(n - m)$ übrig; diese Determinante heisst in Rücksicht auf die gegebene ein Minor von der Ordnung $(n - m)$, oder eine Unterdeterminante, auch Partialdeterminante, oder endlich abgeleitete Determinante.

Wenn nun ein System von n^2 Elementen im quadratischen Schema geordnet vorliegt, so ist es angezeigt, neben der einen Determinante, die aus allen Elementen gebildet ist, auch diese sämmtlichen Unterdeterminanten zu betrachten, welche man mit einem Theil jener Elemente herstellen kann, indem man diese in der ihnen zugewiesenen Ordnung und Vertheilung belässt.

Erhält der Minor zu Elementen seiner Hauptdiagonale solche Elemente, die der Hauptdiagonale der gegebenen Determinante angehören, so heisst er Hauptminor oder Diagonalminor.

Wir wollen damit beginnen, zu prüfen, wieviel Unterdeterminanten von einer gegebenen Ordnung sich vorfinden.

Es leuchtet ein, dass es von der Ordnung $(n - 1)$ nur soviel giebt, als Elemente vorhanden sind, nämlich n^2. Es lässt sich ja eine Zeile auf n-fach verschiedene Weise unterdrücken, da es gerade n Zeilen giebt, und ebenso kann man auf n verschiedene Weisen die Tilgung einer Spalte vornehmen; jedesmal erhält man einen anderen Minor. Daher giebt es $n \, . \, n = n^2$ Minoren der Ordnung $(n - 1)$.

Durch eine entsprechende Überlegung stellen wir fest, dass man m Zeilen auf

$$\binom{n}{m}$$

verschiedene Arten unterdrücken kann, wobei mit dieser Klammerbezeichnung der Binomialkoeffizient gemeint ist:

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdots m} = n_m$$

Das Nämliche gilt für den Fall der Tilgung von m Spalten. Wir finden somit die Anzahl der Unterdeterminanten von der Ordnung $(n - m)$, nämlich:

$$\left[\binom{n}{m}\right]^2$$

Wir werden nun leicht die Zahl der Hauptminoren von gegebener Ordnung bestimmen. Um solchen Hauptminor von der Ordnung m zu bekommen, braucht man nur $(n - m)$ Paare von Zeilen und Spalten, die sich auf der Hauptdiagonale treffen, zu unterdrücken, und dies kann geschehen auf

$$\binom{n}{m}$$

verschiedene Weisen. Also sind gerade in dieser Anzahl Hauptminoren der Ordnung m vorhanden.

Wir werden sagen, ein Minor sei von gerader oder ungerader Klasse, jenachdem die Summe der Ordnungszahlen gerade ist oder ungerade, welche den Zeilen und den Spalten entsprechen, die diesen Minor bilden.

So bleibt, wenn wir in der Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

die 2-te und 3-te Zeile und die 2-te und 4-te Spalte tilgen, der Minor 2-ter Ordnung zurück:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Derselbe ist aus Elementen der Spalten 1, 3 und der Zeilen 1, 4 gebildet; die Summe dieser vier Zahlen ist 9; also ist dies ein Minor von ungerader Klasse.

Im Gegentheil ist der andere Minor gleicherweise 2-ter Ordnung

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$$

von gerader Klasse.

Die m Zeilen und m Spalten, die wir in einer Determinante unterdrücken, schneiden sich in m^2 Elementen dieser Determinante,

und diese bilden ihrerseits wiederum eine Determinante, welche ebenfalls ein **Minor** der gegebenen Determinante sein wird; denn man wird ja auch sie darstellen können, indem man die Zeilen und Spalten, die vorhin unterdrückt worden waren, bestehen lässt und im Gegentheil diejenigen Zeilen und Spalten tilgt, die zuerst übrig gelassen waren. Dieser Minor ist von der m-ten Ordnung. Er enthält Elemente, welche in dem andern Minor, den wir vorher betrachteten, nicht auftraten. Mit Vortheil widmet man solchen Paaren von Minoren eine gemeinsame Untersuchung, man nennt dabei den einen **komplementär** zum andern oder sein Komplement.

Zum Beispiel sind die komplementären Minoren zu den zwei kurz vorher verzeichneten beziehungsweise:

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

Vor Allem leuchtet zunächst ein, dass die Summe der Ordnungen zweier Minoren, wovon der eine komplementär zum andern, stets gleich n ist.

Ausserdem werden wir von den Zahlen, durch die der Klassencharakter zweier komplementären Minoren bestimmt wird, leicht nachweisen können, dass entweder beide gerade oder beide ungerade sind.

Denn addiert man die Ordnungszahlen der Zeilen und der Spalten, die in dem einen und dem andern Minor vorkommen, so wird man, da ja in der Gesammtheit der beiden Minoren alle Zeilen und alle Spalten und zwar jede ein einziges Mal dargestellt sind, immer als Ergebniss erhalten:

$$2(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$

das heisst, eine **gerade** Zahl, und somit wird unsere Behauptung erwiesen.

Es ist von Nutzen, folgende Bezeichnung einzuführen. Bei gegebenem **Minor** haben wir erklärt, was unter dem zu ihm **komplementären** (dem Komplemente) verstanden werden soll; betrachten wir den letzteren aber mit einem Vorzeichen versehen und zwar als positiv oder negativ, jenachdem er von gerader oder ungerader Klasse ist, dann wollen wir ihn **adjungiert** nennen oder das **algebraische Komplement des gegebenen Minors**.

§ 4. Entwicklung einer Determinante nach Determinanten niedrigerer Ordnung.

Heben wir einen Minor einer gegebenen Determinante und sein algebraisches Komplement hervor.

Wir wollen das Produkt der beiden so erhaltenen Unterdeterminanten bilden.

Der eine Minor (von der Ordnung $n - m$) wird, wenn er gemäss unserer Erklärung der Determinante entwickelt ist, $(n - m)!$ Glieder begreifen und der andere (von der Ordnung m) $m!$ Glieder. In dem Produkte der beiden werden also

$$(n - m)!\, m!$$

Glieder enthalten sein.

Wir werden zeigen, dass jedes dieser Glieder mit demselben Vorzeichen, wie wir es behufs seiner Einführung in die Rechnung hier festgesetzt hatten, auch in der Entwicklung der vorgelegten Determinante erscheint.

Nehmen wir an, der Minor von der Ordnung m sei gebildet aus den Zeilen mit Ordnungszahlen

$$s_1\, s_2 \cdots s_m$$

und aus den Spalten, deren Ordnungszahlen

$$r_1\, r_2 \cdots r_m,$$

wobei man nach den Erklärungen des vorigen Paragraphen (siehe S. 11) weiss, dass:

$$s_1 < s_2 < \cdots < s_m$$
$$r_1 < r_2 < \cdots < r_m$$

Der komplementäre Minor wird aus Elementen zusammengesetzt sein, die den Zeilen und Spalten entnommen sind, deren Ordnungszahlen unter den Zahlen (s) und (r) nicht auftreten.

Mögen beziehungsweise und in richtiger Folge die Zahlenreihen:

$$s_1' < s_2' \cdots < s_{n-m}'$$
$$r_1' < r_2' \cdots < r_{n-m}'$$

die Ordnungszahlen der Zeilen und Spalten des komplementären Minors der Ordnung $(n - m)$ vorstellen.

Die Zahlen (s) und (s') bilden zusammen genommen eine Permutation der Zahlen $1, 2, \cdots n$, desgleichen die Zahlen (r), (r').

Ein Glied des Produktes der beiden Minoren wird augenscheinlich ein Produkt von n Elementen der gegebenen Determinante und,

weil unter diesen, in ihm vereinten Elementen nicht zwei derselben Spalte oder Zeile angehören, wird es zugleich, abgesehen noch vom Vorzeichen, ein Glied der Entwicklung der gegebenen Determinante sein. Ein solches Glied wird im Allgemeinen die Form haben:

$$a_{s_1\varrho_1}\, a_{s_2\varrho_2} \cdots a_{s_m\varrho_m} \times a_{s_1'\varrho_1'}\, a_{s_2'\varrho_2'} \cdots a_{s'_{n-m}\varrho'_{n-m}}$$

wobei unter $(\varrho_1\, \varrho_2 \cdots \varrho_m)$ eine Permutation der Zahlen $r_1\, r_2 \cdots r_m$ zu verstehen ist und unter $(\varrho_1'\, \varrho_2' \cdots \varrho'_{n-m})$ eine Permutation der Zahlen $r_1'\, r_2' \cdots r'_{n-m}$. Vorausgesetzt, die Permutation $(\varrho_1\, \varrho_2 \cdots \varrho_m)$ enthalte ϱ Inversionen und die andere $(\varrho_1'\, \varrho_2' \cdots \varrho'_{n-m})$ deren ϱ', so wird das Zeichen jenes Gliedes insoweit übereinstimmen mit dem Zeichen von

$$(-1)^{\varrho+\varrho'}$$

und weiterhin wird das endgiltige Zeichen jenes Gliedes demjenigen von

$$(-1)^{\varrho+\varrho'+s_1+\cdots+s_m+r_1+\cdots+r_m}$$

gleichkommen, wenn wir nämlich an die Übereinkunft denken, nach der wir das Vorzeichen des Produktes zweier Minoren umkehren wollten, falls diese Minoren der ungeraden Klasse angehören, das heisst hier im Besonderen, wenn

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_m + r_1 + r_2 + \cdots + r_m$$

eine ungerade Zahl ist.

Wir wollen nun andrerseits prüfen, welches Zeichen für dies Glied zu wählen sein wird, wenn man es als zugehörig zur Entwicklung der gegebenen Determinante betrachtet.

Sein Zeichen wird von der Anzahl der Inversionen abhängig sein, die sich finden in den Permutationen:

$$(s_1\; s_2 \;\cdots\; s_m\; s_1'\; s_2' \;\cdots\; s'_{n-m})$$
$$(\varrho_1\; \varrho_2 \;\cdots\; \varrho_m\; \varrho_1'\; \varrho_2' \;\cdots\; \varrho'_{n-m})$$

Es bilden nun die (s) und desgleichen die (s') unter einander keine Inversionen, da sie ja in aufsteigender Folge geordnet sind. Dagegen können die (s) Inversionen mit den (s') bilden. Die Zahl dieser Inversionen kann man in folgender Weise berechnen: s_1 wird in Inversion stehen zu den $(s_1 - 1)$ kleineren Zahlen und da doch $s_2 \cdots s_m$ sämmtlich grösser sind als s_1, so werden sich die betreffenden Zahlen allein unter den s' vorfinden. Ebenso wird s_2 mit $(s_2 - 1)$ kleineren Zahlen Inversion bilden, doch da s_1 schon eine von diesen ist, so werden ihrer unter den s' nur noch $(s_2 - 2)$ bleiben. Und

fährt man so fort, so erhält man endlich die Zahl der Inversionen, welche zwischen den s und den s' bestehen, dargestellt durch:

$$s_1 - 1 + s_2 - 2 + s_3 - 3 + \cdots + s_m - m = s_1 + s_2 + \cdots + s_m - \frac{1}{2} m(m+1)$$

Wir wollen jetzt die Inversionen innerhalb der Zahlreihe (ϱ) (ϱ') untersuchen. Das sind erstens solche, die dem Theil (ϱ) angehören, und deren Zahl wir im Vorangehenden mit ϱ bezeichnet haben; dann die, welche die (ϱ') mit einander bilden, der Zahl nach ϱ'; endlich sind es solche, die zwischen den (ϱ) und den (ϱ') bestehen.

Die letzteren kann man berechnen, wenn man bemerkt, dass ihre Zahl sich bei beliebiger Vertauschung der ϱ unter einander nicht ändert, und so zum Beispiel, wenn man diese der Grösse nach in aufsteigender Reihe ordnet. Danach bestimmt man ihre Anzahl mit Hilfe derselben Betrachtung, die zuletzt noch bezüglich der s angestellt wurde, und man findet dafür:

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_m - \frac{1}{2} m (m + 1)$$

Also wird das gesuchte Vorzeichen dasjenige von:

$$(-1)^{\varrho + \varrho' + s_1 + \cdots + s_m + \varrho_1 + \cdots + \varrho_m}$$

indem man beachtet, dass $m(m+1)$ sicher eine gerade Zahl ist.

Da nun

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_m = r_1 + r_2 + \cdots + r_m$$

weil die ϱ dieselben Zahlen sind, wie die r, und nur in verschiedener Ordnung, erfährt man schliesslich, dass das Zeichen, welches man dem Gliede

$$a_{s_1 \varrho_1} \cdots a_{s_m \varrho_m} a_{s_1' \varrho_1'} \cdots a_{s'_{n-m} \varrho'_{n-m}}$$

in der Entwicklung der gegebenen Determinante beizulegen hat, das nämliche ist, womit dieses Glied, nach geschehener Übereinkunft, in dem Produkte der beiden komplementären Unterdeterminanten erscheint.

Hiermit ist erwiesen, dass ein solches Produkt mit dem Zeichen $+$ oder $-$ versehen, jenachdem die Unterdeterminanten gerader oder ungerader Klasse sind, einen Theil der gegebenen Determinante darstellt.

Wir betrachten nun m Zeilen oder m Spalten. Die Zahl der Unterdeterminanten von der Ordnung m, die in diesen Zeilen oder Spalten enthalten sind, beträgt offenbar:

$$\binom{n}{m}.$$

Multiplizieren wir jede von ihnen mit der zu ihr gehörigen komplementären Unterdeterminante und geben dem Produkte nach der gewohnten Regel das Zeichen + oder —, so erhalten wir im Ganzen

$$\binom{n}{m}(n-m)!\,m! = n!$$

Glieder, lauter unter einander verschiedene, da ja zwei in den m ausgewählten Zeilen enthaltene Minoren stets wenigstens in einer Spalte sich von einander unterscheiden. Indessen gehören alle diese Glieder, wie vorher nachgewiesen, der gegebenen Determinante an, und diese andrerseits hat nur $n!$ Glieder und nicht mehr. Demnach können wir schliessen, dass wir auf solche Art **sämmtliche** Glieder der vor gelegten Determinante erhalten.

Wir sagen deshalb:

Eine Determinante ist gleich der Summe der Produkte ihrer Minoren, enthalten in m Zeilen oder Spalten (wobei m beliebig), in deren komplementäre Minoren, wenn man jedem Produkte das Zeichen + oder — giebt, jenachdem die Minoren, die man multipliziert, von gerader oder ungerader Klasse sind.

Kürzer noch nach der vorher eingeführten Bezeichnungsweise:

Eine Determinante ist gleich der Summe der Produkte ihrer Minoren, enthalten in m Reihen, in deren algebraische Komplemente.

Dieser Zerlegungssatz für Determinanten (Laplacescher Satz) wird in § 9 in erweiterter Fassung uns wiederum beschäftigen.

Setzen wir im Besondern $m = 1$, so führen wir die Betrachtung auf alle in einer einzigen Reihe enthaltenen Minoren zurück. Solche Minoren sind die Elemente selbst und ihre Klasse wird festgestellt, wenn man die Indices addiert, die die Stelle des betreffenden Elementes anzeigen.

Wir gewinnen daher den Satz:

Eine Determinante ist gleich der algebraischen Summe der Produkte, in denen die Elemente einer Zeile oder Spalte mit den zugehörigen algebraischen Komplementen verbunden sind.

§ 5. Eigenschaften der Minoren einer Determinante.

Bemerkenswerth ist der folgende Lehrsatz über Minoren einer Determinante.

Wir haben gezeigt, dass die Summe der Produkte der Elemente einer Zeile (oder Spalte) in ihre entsprechenden algebraischen Komplemente gleich der gegebenen Determinante ist. Nennt man die Determinante D und

$$a_{r1}\, a_{r2} \cdots a_{rn}$$

die Elemente einer Zeile, sowie

$$A_{r1}\, A_{r2} \cdots A_{rn}$$

ihre algebraischen Komplemente, so erhält man die Beziehung:

$$a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \cdots + a_{rn}A_{rn} = D$$

Wir wollen nun eine weitere, zu der eben bezeichneten parallele Zeile, nämlich

$$a_{s1}\, a_{s2} \cdots a_{sn}$$

hervorheben. Es sei also s verschieden von r. Dazu gehören die entsprechenden algebraischen Komplemente:

$$A_{s1}\, A_{s2} \cdots A_{sn}$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass:

$$a_{r1}A_{s1} + \cdots + a_{rn}A_{sn} = 0$$

Die linke Seite dieser Gleichung kann man nämlich als Entwicklung einer Determinante auffassen, die man aus der vorgelegten Determinante erhält, wenn man darin die s-te Zeile tilgt und dafür die Elemente der r-ten Zeile einsetzt; man bekommt alsdann die Entwicklung einer Determinante, die identisch Null ist, weil sie zwei parallele übereinstimmende Zeilen besitzt.

Wir können demnach den Satz aussprechen:

Die Summe der Produkte der Elemente einer Zeile (Reihe) in die algebraischen Komplemente der entsprechenden Elemente einer parallelen Zeile (Reihe) ist Null.

Dieser Lehrsatz lässt sich in gehöriger Verallgemeinerung für die Summe der Produkte von Minoren aufstellen.

Nehmen wir in Betracht m parallele Zeilen, die in ihnen enthaltenen Minoren und die zugehörigen algebraischen Komplemente. Daneben heben wir ein andres System von m Zeilen hervor gleicher Richtung mit jenen, ein von dem ersteren System verschiedenes, das

also wenigstens eine Zeile enthält, die in dem andern nicht vorkommt. Die in diesen neuen m Zeilen enthaltenen Minoren kann man zu den Minoren der m erstgewählten Zeilen in eine eindeutige Beziehung setzen, indem man diejenigen Minoren als entsprechende betrachtet, die von denselben Spalten gebildet werden. Man kann nun zeigen, dass hier der Satz gilt:

Die Summe der Produkte der in m Zeilen (Reihen) enthaltenen Minoren in die algebraischen Komplemente der entsprechenden Minoren, die in m anderen parallelen Zeilen (Reihen) enthalten sind, ist Null.

Wir machen die Annahme, wir hätten es im Besonderen mit den Minoren zu thun, welche in den m Zeilen der Ordnungszahlen

$$\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_m$$

vorkommen, und weiterhin sei das zweite System aus m Zeilen aufgestellt gemäss den Ordnungszahlen:

$$\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_m$$

wobei einige der (ν) auch mit einigen der (μ) übereinstimmen können. Bezeichnen wir durch $M_1 M_2 \ldots$ die in den Zeilen $\mu_1 \cdots \mu_m$ enthaltenen Minoren und durch $M_1' M_2' \cdots$ deren algebraische Komplemente, so wird der Werth der Determinante

$$M_1 M_1' + M_2 M_2' + \cdots$$

gleichkommen.

Benennen wir andrerseits die in den Zeilen $\nu_1 \cdots \nu_m$ enthaltenen Minoren mit $N_1 N_2 \cdots$, so bedeutet der Ausdruck:

$$N_1 M_1' + N_2 M_2' + \cdots$$

nichts andres als den Werth einer Determinante, die aus der gegebenen hervorgehen würde nach Tilgung der Zeilen $\mu_1 \cdots \mu_m$, wenn an deren Stelle Zeilen eingesetzt werden, die in ihren Elementen mit denjenigen der Ordnungszahlen $\nu_1 \cdots \nu_m$ übereinstimmen. Eine solche Determinante wird dann nothwendig wenigstens zwei gleiche parallele Zeilen aufweisen, da ja die beiden Systeme von je m Zeilen wenigstens in einer Zeile sich unterscheiden. Demnach hat sie den Werth Null und in Folge dessen wird auch der Ausdruck:

$$N_1 M_1' + N_2 M_2' + \cdots$$

wie wir es beweisen wollten, verschwinden.

Eine weitere Eigenschaft der Minoren wird im Folgenden besprochen.

Wir wollen mit A_{rs} das algebraische Komplement eines Elementes a_{rs} bezeichnen. Es soll also in dem Symbol A_{rs} das gedachtem Minor zugehörige Zeichen eingeschlossen verstanden werden.

Nun gilt der Satz:

Ist die Determinante gleich Null, so werden die algebraischen Komplemente der Elemente einer Zeile (oder Spalte) proportional sein denen der Elemente einer beliebigen andern parallelen Zeile (oder Spalte).

Es spricht sich dies in der Formel aus:

$$\frac{A_{r1}}{A_{s1}} = \frac{A_{r2}}{A_{s2}} = \cdots = \frac{A_{rn}}{A_{sn}}$$

Das algebraische Komplement A_{r1} läſst sich auf folgende Weise schreiben:

$$A_{r1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & \cdots & a_{r-1,n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

und ist eine Determinante, die aus der gegebenen hervorgeht, wenn man dort die r-te Zeile unterdrückt und an deren Stelle eine Zeile einsetzt, die mit den Elementen

$$1 \quad 0 \cdots 0$$

gebildet ist.

Wenn wir eine beliebige Spalte mit A_{sk} multiplizieren, erhalten wir das Produkt $A_{r1} A_{sk}$. Nehmen wir andrerseits an, die k-te Spalte werde mit A_{sk} multipliziert und nach dieser Veränderung zu den Elementen derselben hinzugefügt die Elemente der ersten Spalte, multipliziert mit A_{s1}, die der zweiten multipliziert mit A_{s2} und so fort, dann werden die Elemente solcher k-ten Spalte alle bis auf eines verschwinden, weil die Gleichungen gelten:

$$\begin{array}{l} a_{11} A_{s1} + \cdots + a_{1k} A_{sk} + \cdots + a_{1n} A_{sn} = 0 \\ \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{s1} A_{s1} + \cdots + a_{sk} A_{sk} + \cdots + a_{sn} A_{sn} = D = 0 \\ \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

Das auf der r-ten Zeile stehende Element wird im Gegentheil einfach A_{s1}.

Mithin wird die Entwicklung solcher Determinante zufolge der vorbezeichneten Umwandlung sich einschränken auf das Produkt von A_{s1} mit dem algebraischen Komplemente desjenigen Elementes, welches der k-ten Spalte und der r-ten Zeile angehört, das heisst A_{rk}. Daher ergiebt sich die Beziehung:

$$A_{r1}\,A_{sk} = A_{s1}\,A_{rk}$$

oder

$$\frac{A_{r1}}{A_{s1}} = \frac{A_{rk}}{A_{sk}}$$

Durch Einführung der Werthe $k = 2, 3, \cdots n$ erhält man alle oben angedeuteten Verhältnisse.

§ 6. Multiplikation zweier Determinanten.

Das Produkt aus zwei Determinanten derselben Ordnung lässt sich mittelst einer Determinante von gleicher Ordnung ausdrücken. Der Nachweis dieser Eigenschaft und die einfache Regel zur Bildung der verschiedenen Elemente der neuen Determinante sind das Ziel unsrer Betrachtungen in diesem Paragraphen.

Mögen die beiden Determinanten bezeichnet sein durch:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Ihr Produkt wird man durch die einzige Determinante der Ordnung $2n$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots 0 \\ \cdot \cdots & \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ a_{n1} \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots 0 \\ -1 \cdots & 0 & b_{11} & \cdots b_{1n} \\ \cdot \cdots & \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ 0 \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots b_{nn} \end{vmatrix}$$

ausdrücken können. Hierbei ist gemeint, dass das Quadrat von Elementen zur rechten Seite des Quadrates der a durchaus nur Elemente

Null enthält, das Quadrat aber zur Linken der b die Elemente auf der Hauptdiagonale gleich -1 und alle übrigen Elemente gleich Null.

Wenn man diese Determinante nach Produkten der in den ersten n Zeilen enthaltenen Minoren entwickelt und beachtet, dass von diesen Produkten nur das eine von Null verschieden ist, welches die Determinante der a enthält und als zweiten Faktor das algebraische Komplement derselben mit positivem Zeichen, die Determinante der b, so ergiebt sich, dass eine nach obigem Schema zusammengesetzte Determinante genau dem Produkte der beiden gegebenen gleich ist. Nun können wir aber durch eine leichte Umwandlung diese Determinante $2n$-ter Ordnung wiederum auf eine Determinante von der Ordnung n zurückführen.

Fügen wir nämlich den Elementen der $(n+1)$-ten Spalte die der ersten Spalte hinzu, multipliziert mit b_{11}, dann die der 2-ten Spalte, multipliziert mit $b_{21}\ldots$, die der n-ten endlich nach Multiplikation mit b_{n1}, so wird die Determinante hierdurch nicht geändert und die Elemente der $(n+1)$-ten Spalte gehen beziehungsweise über in die folgenden:

$$\begin{matrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\cdots+a_{2n}b_{n1} \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdots \quad\quad \cdot \\ a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+\cdots+a_{nn}b_{n1} \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{matrix}$$

Addieren wir nun noch zu den Elementen der $(n+2)$-ten Spalte die der ersten, zweiten, $\cdots$ n-ten, entsprechend multipliziert mit $b_{12}, b_{22}, \cdots b_{n2}$, so werden die Elemente dieser $(n+2)$-ten Spalte sich darstellen in der Reihe:

$$\begin{matrix} a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\cdots+a_{1n}b_{n2} \\ a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2n}b_{n2} \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdots \quad\quad \cdot \\ a_{n1}b_{12}+a_{n2}b_{22}+\cdots+a_{nn}b_{n2} \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{matrix}$$

Wenn man hiermit fortfährt, so ersieht man, dass unsere Determinante auf diese Weise in eine andere, auch $2n$-ter Ordnung, verwandelt wird, in der jedoch an der Stelle, die zuerst die b einnahmen,

Elemente Null erscheinen und in dem Bereich der Elemente Null, die anfänglich rechtsseitig zu dem Quadrate der a sich befanden, bilineare und homogene Ausdrücke in den a und b sich einstellen. Setzt man nämlich

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$

so zeigt unsere Determinante nach geschehener Umwandlung die folgende Gestalt:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Wenn man nun diese Determinante nach Produkten der in den letzten n Spalten enthaltenen Minoren entwickelt und dabei beachtet, dass in den betreffenden Spalten überhaupt nur ein von Null verschiedener Minor sich findet, nämlich die Determinante der c, und dass das algebraische Komplement dieses Minors durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} -1 & \cdots & 0 \\ . & \cdots & . \\ 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^n$$

gebildet wird, die jedoch (nach der Erklärung am Ende von § 3) mit dem Vorzeichen von:

$$(-1)^{1+2+\cdots+n+(n+1)+\cdots+2n} = (-1)^{(2n+1)n} = (-1)^n$$

zu versehen ist, so ist der Schluss gestattet: Unsere Determinante der Ordnung $2n$ stimmt dem Werthe nach genau überein mit der Determinante:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ . & \cdots & . \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

und dies ist eine Determinante n-ter Ordnung.

Hiermit ergiebt sich auch das

Bildungsgesetz für die Produktdeterminante: Die Glieder ihrer ersten Zeile entstehen, wenn man die Summe der Produkte herstellt, in denen die Elemente der ersten Zeile der einen der gegebenen Determinanten nacheinander mit den

Elementen der ersten, zweiten, ..., der n-ten Spalte der andern Determinante verbunden sind; es ist dabei gemeint, dass nur die Elemente mit einander multipliziert werden sollen, die je auf ihrer Zeile und auf ihrer Spalte gleichnamige Stellen inne haben; gleicherweise entstehen dann die Glieder der zweiten Zeile, wenn man die Summe der Produkte aufstellt, in denen Elemente der zweiten Zeile erster Determinante mit Elementen erster, zweiter, ... n-ter Spalte der andern Determinante zusammentreten, und dem entsprechend ist fortzufahren.

Nach dieser Regel hat man die Zeilen der ersten Determinante mit den Spalten der zweiten zu verbinden; natürlich kann man jedoch aus dieser Regel sogleich eine weitere herleiten, bei der in gewohnter Weise die Zeilen der ersten Determinante mit den Zeilen der zweiten, oder auch die Spalten mit den Spalten verbunden werden.

Wirklich können wir, wenn es uns beliebt, in der zweiten Determinante die Zeilen mit den Spalten vertauschen und danach wird die Verbindung der Zeilen der ersten Determinante mit den Spalten der zweiten auf eine Verbindung der Zeilen der ersten und der Zeilen der zweiten in ihrer früheren Gestaltung hinauskommen.

Auf solche Art kann die Produktdeterminante vier verschiedene Formen annehmen, da man ja verknüpfen kann die Zeilen der einen Determinante mit den Zeilen der anderen oder die Zeilen der ersten mit den Spalten der zweiten, oder die Spalten der ersten mit den Zeilen der letzteren oder endlich die Spalten jener mit den Spalten dieser.

Die hier nachgewiesene Regel gilt zunächst für das Produkt zweier Determinanten derselben Ordnung. Wenn aber die beiden Faktoren von verschiedener Ordnung sind, so kann man die nämliche Regel in Anwendung bringen, vorausgesetzt nur, man habe die beiden Determinanten erst zur gleichen Ordnung übergeführt, das heisst, durch geeignete Hinzufügung einer Anzahl von Zeilen und ebensoviel Spalten bewirkt, dass die Determinante niederer Ordnung ohne Änderung ihres Werthes die Ordnung der andern erreicht hat.

Durch ein Beispiel wird die Sache deutlicher erscheinen.

Setzen wir den Fall, es sei eine Determinante 5-ter Ordnung mit einer 2-ter Ordnung

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

zu multiplizieren.

Diese lässt sich sogleich auf die Form einer Determinante 5-ter Ordnung bringen, indem man sie auf folgende Weise schreibt:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Nach der bekannten Anweisung für die Entwicklung einer Determinante ist diese letzte Determinante gleich der vorgelegten von 2-ter Ordnung.

Wenn die beiden gegebenen Determinanten identisch sind, so erhält man nach dem angezeigten Verfahren das Quadrat einer Determinante. Mögen die Elemente der gegebenen Determinante a_{rs} heissen und die des Quadrates c_{rs}.

Das Element c_{rs} ist, Beispiels halber, die Summe der Produkte der Elemente aus der r-ten Zeile, multipliziert in die Elemente der s-ten Zeile, während c_{sr} die Summe der Produkte darstellt, in welchen die Elemente der s-ten Zeile mit denen der r-ten Zeile vereinigt sind. Demgemäss ist

$$c_{rs} = c_{sr}$$

Nennen wir diejenigen zwei Elemente einer beliebigen Determinante **konjugierte**, bei denen die Indices dieselben, aber unter einander vertauscht sind, so gewinnen wir den Satz:

Das Quadrat einer gegebenen Determinante ist eine Determinante, deren konjugierte Elemente zu zwei und zwei einander gleich sind.

So gestaltete Determinanten heissen symmetrische, von ihnen wird in der Folge (§ 16) die Rede sein.

Die Regel für die Multiplikation der Determinanten findet man zum ersten Male dargestellt in den beiden Abhandlungen:

Binet, Sur un système de formules analytiques, et leur application à des considérations géométriques. Journ. de l'éc. pol. cah. 16 (mai 1813) [280—354].

Cauchy, Sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment. Journ. de l'éc. pol. cah. 17 (janv. 1815) [29—112].

Beide Abhandlungen sind am gleichen Tage, dem 30. Nov. 1812, im Institut de France veröffentlicht worden.

Man vergleiche hierzu Baltzer, Det. 1881. S. 49 Anm., Günther, Det. 1877. S. 24 f. und die Bemerkungen Stäckels in der deutschen Ausgabe von Jacobis De formatione et proprietatibus determinantium. Leipzig 1896. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften N. 77. S. 72.

§ 7. Die Produktdeterminante zweier rechteckiger Matrices.

Die Beschäftigung mit der Bildung der Produktdeterminante zu zwei gegebenen Determinanten veranlasst uns, eine Bezeichnung und einen neuen Begriff einzuführen.

Mögen c_{rs} die Elemente des Produktes C, entsprechend a_{rs}, b_{rs} diejenigen der vorgelegten Determinanten A, B heissen. Wir betrachten nun im Besonderen den folgenden Minor von C:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{vmatrix}$$

Nehmen wir an, das Produkt C sei hergestellt worden, indem man die A und B nach Zeilen multipliziert habe. Dann ist das Element c_{rs} durch die Formel gegeben:

$$c_{rs} = a_{r1}b_{s1} + a_{r2}b_{s2} + \cdots + a_{rn}b_{sn}$$

Der obige Minor kann nun auf folgende Art symbolisch dargestellt werden.

Wir wollen ein Verzeichniss von $m \,.\, n$ Elementen, in dem diese in Gestalt eines Rechtecks angeordnet sind, eine rechteckige Matrix nennen; und zwar sollen m Zeilen vorhanden sein, dabei eine jede aus n Elementen bestehen. Wird $m = n$ gesetzt, so erhält man die quadratische Matrix, wie wir sie schon in unserem einleitenden Paragraphen eingeführt haben.

Wir wollen zwei solche rechteckige Matrices, nämlich:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

und:

$$\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{matrix}$$

in Betracht nehmen.

Verbinden wir nun die erste Zeile der einen Matrix mit der ersten Zeile der andern, in derselben Weise, in der wir vorgingen, das Produkt zweier Determinanten herzustellen, mit andern Worten,

bilden wir die Summe der Produkte, in welchen die Elemente der ersten Zeile jener Matrix mit denen der ersten Zeile dieser multiplikativ verbunden sind, verbinden dann ebenso die erste Zeile der einen mit der zweiten, dritten, ..., m-ten der andern Matrix und wiederholen das Verfahren gleicherweise rücksichtlich aller folgenden Zeilen der ersteren Matrix, so erhalten wir augenscheinlich im Ganzen $m \cdot m = m^2$ Elemente, die genau mit denen des obigen Minor von C übereinstimmen.

Es ist dies eine Bemerkung von grundlegender Bedeutung, weil uns hierdurch gewissermaassen ein Weg gezeigt wird, den Minor von C mittelst der zwei rechteckigen Matrices, wie sie oben gekennzeichnet sind, darzustellen.

Dies leisten wir durch die Erklärung:

Es heisse die Determinante:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{vmatrix}$$

das zeilenweis gebildete Produkt der beiden rechteckigen Matrices.

Daher gewinnen wir nun den Satz:

Jeder Minor der Produktdeterminante aus zwei Determinanten ist das Produkt zweier rechteckiger Matrices.

Der Name „rechteckige Matrix“ bedeutet an und für sich durchaus nicht eine Grössenbestimmung; erst das Produkt zweier solcher ähnlicher Matrices erwirbt nach der eben gegebenen Erklärung eine in diesem Sinne wohl umschriebene Bedeutung.

Ausserdem ist, um von einem Produkte zweier rechteckiger Matrices sprechen zu können, unseren Erörterungen zufolge nöthig, dass sie beide aus gleichviel Zeilen, beide aus gleichviel Spalten zusammengesetzt sind.

In Übereinstimmung mit dem, was oben ausgeführt worden ist mit Bezug auf das Produkt zweier Determinanten, kann das von uns vorher aufgestellte Produkt ein nach Zeilen gebildetes Produkt genannt werden. In diesem Fall erhält man eben eine Determinante von der Ordnung m, da die Zahl der Zeilen der Matrices m $(m < n)$ beträgt.

Unwillkürlich bietet sich hier der Gedanke, das Produkt nun auch einmal nach Spalten auszuführen. Wir würden dann eine De-

terminante der Ordnung n gewinnen, da doch die Zahl der Spalten sich auf n beläuft. Dieselbe Determinante würden wir erhalten, wenn wir zuerst in beiden Matrices die Zeilen mit den Spalten vertauschten und danach das Produkt wiederum nach Zeilen herstellten; aber dann hätten die beiden Matrices, von denen wir ausgehen, eine höhere Anzahl von Zeilen als von Spalten.

Es liegt hierin die Aufforderung an uns, eine allgemeine Untersuchung der auf die angezeigte Weise hervorgegangenen Determinante zu widmen, hervorgegangen nämlich durch zeilenweise Multiplikation aus zwei rechteckigen Matrices von m Zeilen und n Spalten, wobei m kleiner oder grösser sein mag als n.

Zwei Lehrsätze, die wir finden werden, sind äusserst bemerkenswerth.

Zum Beginne ist darauf aufmerksam zu machen, dass das Produkt zweier Matrices, sofern es nach Zeilen gebildet, jedenfalls in der Form der folgenden Determinante von der Ordnung $(m + n)$ sich schreiben lässt:

$$P = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{m1} & -1 & 0 \cdots & 0 \\ a_{12} \cdots a_{m2} & 0 & -1 \cdots & 0 \\ \cdot \;\cdots\; \cdot & \cdot & \cdot \;\cdots & \cdot \\ a_{1n} \cdots a_{mn} & 0 & 0 \cdots & -1 \\ 0 \;\cdots\; 0 & b_{11} & b_{12} \cdots & b_{1n} \\ \cdot \;\cdots\; \cdot & \cdot & \cdot \;\cdots & \cdot \\ 0 \;\cdots\; 0 & b_{m1} & b_{m2} \cdots & b_{mn} \end{vmatrix}$$

Sardi, Nuova dimostrazione del prodotto di due matrici. Giorn. di Batt. vol. 5 (1867) [174—177].

Gordans Vorlesungen über Invariantentheorie (Kerschensteiner) 1. Bd. Leipzig 1885. S. 79 ff.

Verfahren wir nämlich mit diesem Schema ähnlich, wie wir es im vorhergehenden Paragraphen gethan haben, das heisst, fügen wir zur ersten Spalte hinzu die $(m+1)$-te, multipliziert mit a_{11}, die $(m + 2)$-te, multipliziert mit $a_{12} \ldots$, so erkennen wir sogleich, dass diese Determinante P sich in eine andre verwandelt, die ohne Weiteres sich auf eine Determinante m-ter Ordnung einschränkt. Letztere stellt aber nach unserer begrifflichen Erklärung das zeilenweise Produkt der beiden Matrices vor.

Wir wollen nun die beiden Fälle $m < n$ und $m > n$ unterscheiden. Wir entwickeln vorliegende Determinante nach Produkten der Minoren, die in den ersten m Spalten enthalten sind. Ist $m > n$, dann trifft es bei all diesen Minoren zu, dass sie eine Zeile einschliessen, die aus

Elementen Null besteht. Mithin sind sie selbst alle Null und wir können daher ohne Weiteres schliessen:

Ist $m > n$, so wird das Produkt der beiden rechteckigen Matrices von m Zeilen und n Spalten, zeilenweise gebildet, gleich Null.

Setzen wir im Gegentheil den zweiten Fall voraus, $m < n$, dann ist es viel leichter, auf andere Weise vorzugehn.

Die Produktdeterminante der beiden Matrices kann (nach dem Lehrsatze über Determinanten mit zusammengesetzten Elementen, § 2, 9) in eine Summe von n^m Determinanten zerlegt werden, die folgende Gestalt besitzen:

$$\begin{vmatrix} a_{1r_1} b_{1r_1}, & a_{1r_2} b_{2r_2}, & \cdots & a_{1r_m} b_{mr_m} \\ a_{2r_1} b_{1r_1}, & a_{2r_2} b_{2r_2}, & \cdots & a_{2r_m} b_{mr_m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{mr_1} b_{1r_1}, & a_{mr_2} b_{2r_2}, & \cdots & a_{mr_m} b_{mr_m} \end{vmatrix} = b_{1r_1} b_{2r_2} \cdots b_{mr_m} \begin{vmatrix} a_{1r_1} & a_{1r_2} & \cdots & a_{1r_m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{mr_1} & a_{mr_2} & \cdots & a_{mr_m} \end{vmatrix}$$

wobei $(r_1\, r_2 \ldots r_m)$ eine Variation m-ter Klasse mit Wiederholungen zu den n Indices 1, 2, ... n vorstellt. Lassen wir die $(r_1\, r_2 \ldots r_m)$ sich auf jede mögliche Art ändern und summieren dann die entstehenden Ausdrücke, so erhalten wir die Produktdeterminante.

Wir bemerken nun in erster Linie, dass, wenn zwei oder mehrere der r unter einander gleich sind, das Ergebniss Null wird; also wird es genügen, sich auf diejenigen Variationen der n Indices zu je m zu beschränken, für die Wiederholung ausgeschlossen ist. Ferner wollen wir die Summierung dergestalt ausführen, dass wir sie zunächst auf alle möglichen $m!$ Permutationen derselben Gruppe von Indices r ausdehnen. Der absolute Werth der Determinante der a bleibt in jedem solchen Falle, wo die Entwicklung bei ein und derselben Gruppe von Indices verweilt, ungeändert, es wechselt nur ihr Zeichen. Dies wird positiv oder negativ sein, jenachdem die Permutation der r zur Klasse der geraden oder ungeraden Permutationen gehört.

Man erhält dann:

$$\begin{vmatrix} a_{1r_1} & \cdots & a_{1r_m} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{mr_1} & \cdots & a_{mr_m} \end{vmatrix} \times \sum \pm b_{1r_1} b_{2r_2} \cdots b_{mr_m}$$

das heisst, das Produkt:

$$\begin{vmatrix} a_{1r_1} & \cdots & a_{1r_m} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{mr_1} & \cdots & a_{mr_m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1r_1} & \cdots & b_{1r_m} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{mr_1} & \cdots & b_{mr_m} \end{vmatrix}$$

Dies ist aber das Produkt zweier homologen Minoren (bestehend aus gleichnamigen Spalten) innerhalb der beiden gegebenen Matrices. Lässt man auf jede mögliche Art die Indices $r_1\, r_2 \ldots r_m$ bei Auswahl derselben unter den Zahlen $1, 2, \ldots n$ sich ändern und summiert, so ergiebt sich die Summe der Produkte der homologen Minoren, die in den zwei Matrices enthalten sind, oder mit andern Worten:

Das Produkt zweier rechteckiger Matrices mit je n Spalten und m Zeilen ($m < n$) ist, wenn es zeilenweise ausgeführt wird, gleich der Summe der Produkte, in denen die in der einen Matrix enthaltenen Minoren m-ter Ordnung mit den homologen Minoren der andern verbunden sind.

Wir haben schon gesagt, dass jeder Minor der Produktdeterminante, die zu zwei vorgelegten Determinanten gehört, sich als Produkt zweier rechteckiger Matrices ausdrücken lässt, die aus den beiden Determinanten zu wählen sind. Es ist nun das Gesetz leicht festzustellen, nach welchem man diese beiden Matrices auszuwählen hat. Nehmen wir einmal an, es handle sich um ein Produkt, das durch Verbindung der Zeilen mit Zeilen erhalten worden.

Wir betrachten den Minor von der Ordnung m, der zu Elementen seiner Hauptdiagonale die Elemente

$$c_{r_1 s_1},\; c_{r_2 s_2},\; \cdots\; c_{r_m s_m}$$

hat.

Man führt leicht den Nachweis dafür, dass dieser Minor aus der zeilenweisen Multiplikation der zwei rechteckigen Matrices hervorgeht, wovon die eine, in der ersten Determinante enthalten, zu Zeilen die der Ordnungszahlen $r_1\, r_2 \cdots r_m$ hat, und die andere, eine in der zweiten Determinante vorkommende Matrix, von Zeilen gebildet wird, die den Zahlen $s_1\, s_2 \cdots s_m$ entsprechen.

Wenn wir daher in der Determinante der c einen Minor betrachten, dessen diagonale Elemente sämmtlich auch diagonale Elemente der gesamten Determinante sind (ein Minor, wie wir ihn schon oben als diagonalen Minor oder Hauptminor bezeichneten, siehe S. 11), dann sind die $s_1\, s_2 \cdots s_m$ alle entsprechend gleich den $r_1\, r_2 \cdots r_m$ und demzufolge die rechteckigen Matrices aus beiden Determinanten, deren Auswahl zu treffen ist, aus Zeilen mit denselben Ordnungszahlen gebildet, es sind dies, mit andern Worten, homologe Matrices.

§ 8. Reziproke Determinanten.

Jedem einzelnen Elemente einer gegebenen Determinante entspricht ein algebraisches Komplement. Es giebt mithin n^2 algebraische Komplemente; wir werden sie A_{rs} nennen.

Die aus diesen gebildete Determinante, nämlich:

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{matrix}$$

heisst die zur gegebenen reziproke Determinante. Nun gelten recht bemerkenswerthe Lehrsätze, die die Beziehungen zwischen der reziproken und der vorgelegten Determinante feststellen.

Von Vortheil ist hier die Anmerkung, dass die Determinante dem Werthe und dem Zeichen nach dieselbe sein würde, wenn die A_{rs} nicht die algebraischen Komplemente, sondern statt dessen nur die Komplemente zu den Elementen darstellen würden. Es würde diese Änderung nämlich gleichwerthig sein einem Zeichenwechsel bei den Elementen an ungerader Stelle. (Siehe § 2, 7.) Für die folgenden Darlegungen erscheint es jedoch angemessen, wenn die A die algebraischen Komplemente darstellen.

Zunächst vor Allem wissen wir, dass, wenn die gegebene Determinante den Werth Null hat, die algebraischen Komplemente der Elemente einer Reihe proportional sind denen der Elemente einer parallelen Reihe. (Siehe S. 20.) Damit ergeben sich für die reziproke Determinante die Elemente zweier Zeilen oder Spalten als proportional und dies genügt zu dem Schlusse, dass die reziproke Determinante verschwindet. (Siehe § 2, 8.)

Übrigens sind dann für jeden beliebigen Minor, der der reziproken Determinante zugehört (natürlich mit Ausnahme der Minoren erster Ordnung, die die Elemente selbst vorstellen), gleichfalls die Elemente zweier beliebigen Reihen unter einander proportional und wir können daher schliesslich den Satz aussprechen:

Wenn eine Determinante Null ist, so haben die zu ihr reziproke Determinante und auch alle Minoren derselben (bis zur 2-ten Ordnung) den Werth Null.

Es giebt einen recht einfachen Lehrsatz, der ohne Weiteres den Werth der Reziproken zu einer vorliegenden Determinante angiebt. Stellen wir einmal das Produkt einer Determinante und der zu ihr reziproken dar. Der gebräuchlichen Regel zufolge wird

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} A_{11} + \cdots + a_{1n} A_{1n}, & a_{11} A_{21} + \cdots + a_{1n} A_{2n}, & \cdots & a_{11} A_{n1} + \cdots + a_{1n} A_{nn} \\ a_{21} A_{11} + \cdots + a_{2n} A_{1n}, & a_{21} A_{21} + \cdots + a_{2n} A_{2n}, & \cdots & a_{21} A_{n1} + \cdots + a_{2n} A_{nn} \\ \cdot \quad \cdots \quad \cdot & \cdot \quad \cdots \quad \cdot & \cdots & \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ a_{n1} A_{11} + \cdots + a_{nn} A_{1n}, & a_{n1} A_{21} + \cdots + a_{nn} A_{2n}, & \cdots & a_{n1} A_{n1} + \cdots + a_{nn} A_{nn} \end{vmatrix}$$

Nach bekannten Lehrsätzen (Siehe § 5, zu Beginn) über die Minoren einer Determinante ist nun ersichtlich, dass in dieser Produktdeterminante, abgesehen von den Elementen der Hauptdiagonale, alle übrigen Null sind. Die Elemente der Hauptdiagonale sind hingegen dem Werthe der gegebenen Determinante gleich; der letztere mag mit D bezeichnet werden.

Daher erhält man, wenn die Reziproke mit R benannt wird,

$$RD = D^n$$

und daraus:

$$R = D^{n-1}$$

So folgt dieser wichtige und einfache Lehrsatz (Cauchy):

Die Reziproke zu einer vorgelegten Determinante ist dem Werthe nach deren $(n-1)$-te Potenz.

Wir wollen jetzt untersuchen, wie sich die Minoren von R mit Hilfe derer von D ausdrücken lassen.

Wir können eine gegenseitige Beziehung zwischen den Minoren von D und denen von R feststellen, indem wir diejenigen Minoren als entsprechende auffassen, welche in D und in R von Zeilen und Spalten je mit den nämlichen Ordnungszahlen gebildet werden. Zwei so gestaltete Minoren werden wir homologe nennen.

Der grösseren Einfachheit wegen betrachten wir zunächst den Minor m-ter Ordnung, der in den ersten m Spalten und den ersten m Zeilen der Reziproken R enthalten ist. Er wird dargestellt durch:

$$M = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{m1} & \cdots & A_{mm} \end{vmatrix}$$

Wir werden ihn mit der gegebenen Determinante multiplizieren, natürlich nach geeigneter Hinzufügung von Zeilen und Spalten, sodass wir die Ordnung dieses Minor erst auf n erhöhen.

Es empfiehlt sich nun hier im Besondern, das Produkt in der folgenden Form aufzustellen:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} & A_{1,m+1} & \cdots & A_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{m1} & \cdots & A_{mm} & A_{m,m+1} & \cdots & A_{mn} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Von diesen zwei Determinanten ist die erstere, wie man unmittelbar einsieht, dem Minor M gleichwerthig; das Produkt beider wird:

$$\begin{vmatrix} D & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & D & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1,m+1} & a_{2,m+1} & \cdots & a_{m,m+1} & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{n,m+1} \\ a_{1,m+2} & a_{2,m+2} & \cdots & a_{m,m+2} & a_{m+1,m+2} & \cdots & a_{n,m+2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} & a_{m+1,n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Entwickelt man diese Determinante nach den Minoren, die in den ersten m Zeilen vorkommen, so erhält man:

$$D^m \cdot \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{n,m+1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m+1,n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

und die hier auftretende Determinante ist abgesehen vom Vorzeichen nichts andres, als eine Unterdeterminante N, die innerhalb der vorgelegten Determinante als homologer Bestandtheil dem Komplemente von M in der Reziproken entspricht.

Es ergiebt sich daher:

$$M . D = D^m . N$$

und daraus:

$$M = N . D^{m-1}$$

Dies Ergebniss haben wir mit Benutzung des besonderen Minor M erhalten, können es aber auf den Fall eines beliebigen andern Minor erweitern; denn da jeder beliebige andere Minor in R von der Ordnung m bei passender Verrückung von Zeilen und Spalten (die nur höchstens das Zeichen von R zu ändern vermag) sich dahin bringen

lässt, die Stellung von M in R einzunehmen, so wird man, wenn man dann noch auf ähnliche Weise und mit der gleichen Wirkung im Zeichenwechsel die Zeilen und Spalten von D umstellt, das nämliche Ergebniss erschliessen können. Wir dürfen mithin ohne Beschränkung den Satz (Jacobi) aussprechen:

Ein beliebiger Minor M von m-ter Ordnung, innerhalb der reziproken Determinante R, ist gleichwerthig dem algebraischen Komplemente innerhalb D zu dem Minor, der homolog ist zu M, multipliziert noch mit der $(m-1)$-ten Potenz der gegebenen Determinante.

Für die Minoren $(n-1)$-ter Ordnung ergiebt sich:

Das algebraische Komplement eines Elementes A_{rs} von R ist gleich dem entsprechenden Elemente a_{rs} von D, multipliziert mit der $(n-2)$-ten Potenz desselben D.

Dieser letzte Lehrsatz zeigt, dass, wenn man zu einer Determinante D die Reziproke R bildet und dann zu dieser wiederum ihre Reziproke R', die Elemente a_{rs}, allerdings in Begleitung des Faktors D^{n-2}, an gleichnamiger Stelle, wie in D, jetzt in R' erscheinen, sodass D und R', abgesehen von dem Faktor $D^{n(n-2)}$, in ihrer Bildung übereinstimmen.

Und hierdurch eben wird die Bezeichnung „reziproke Determinante", die wir dem R beilegten, gerechtfertigt; die beiden Determinanten D und R stehen eine zur anderen in einem gewissen Wechselverhältniss, das sich leicht zu einem vollkommenen würde ausgestalten lassen, wollte man etwa mit Kronecker zwei Elementensysteme als reziproke bezeichnen, sobald ihre Zusammensetzung dem Produktsatze gemäss das sogenannte Einheitssystem entstehen lässt. Nach dieser Auffassung würde System α_{rs} reziprok zu System a_{rs} heissen, wenn $\alpha_{rs} = A_{rs} : D$ ist.

Aus obigem Hauptsatze entspringt auch sogleich der weitere Satz:

Wenn in D ein Minor Null ist, so ist das Komplement des zu ihm homologen Minor in R auch Null.

Ein andrer Lehrsatz über reziproke Determinanten ist der folgende:

Hat man zwei Determinanten derselben Ordnung D und D' und multipliziert sie mit einander auf eine von den vier möglichen Arten, oder, um durch ein Beispiel bestimmteren Vorstellungen Raum zu gewähren, multipliziert sie nach Zeilen (also durch Verbindung der Zeilen mit den Zeilen), stellt dann auf dieselbe Weise das Produkt ihrer Reziproken

dar, R und R', so wird man zwei Determinanten P, Q erhalten, von welchen die zweite die zur ersten reziproke ist.

Dass das Produkt Q seinem Werth nach reziprok sein muss zu P, das erkennt man sofort, wenn man an die Gleichungen denkt:

$$R = D^{n-1}$$
$$R' = D'^{n-1}$$

und ihre unmittelbare Folge:

$$Q = R.R' = (D.D')^{n-1} = P^{n-1}$$

Wir wissen ja doch, dass die Reziproke zu P gerade den Werth P^{n-1} besitzt.

Fraglich bleibt eben nur, wie zu beweisen, dass sich Q auch in seinen einzelnen Elementen als zu P reziprok darstellt.

Die Elemente von D mögen heissen a_{rs}, a'_{rs} die von D', die Elemente von R, R' beziehungsweise A_{rs}, A'_{rs}. Wir bezeichnen noch in entsprechender Weise mit b_{rs}, B_{rs} die Elemente der Produkte P, Q.

Wie man vom vorigen Paragraphen her weiss (Siehe S. 30), ist das Komplement von b_{rs} in P eine Determinante, die sich aus zwei rechteckigen Matrices als ihr Produkt nach Zeilen bilden lässt. Die beiden Matrices gewinnt man aus D und D', wenn man darin beziehungsweise die r-te und die s-te Zeile unterdrückt. Um dann das algebraische Komplement zu erhalten, bedarf es noch der Multiplikation mit $(-1)^{r+s}$.

Nach einem unserer Sätze über Multiplikation der Matrices ergiebt sich, dass ein Produkt, wie es hier gefordert wird, gleich kommt der Summe der Produkte aus allen Paaren homologer Determinanten von der Ordnung $(n-1)$, die in jenen Matrices vorkommen.

Weil nun die in jenen Matrices enthaltenen Determinanten beziehungsweise die folgenden sind:

$$\begin{array}{ll} (-1)^{r+1}A_{r1}, & (-1)^{s+1}A'_{s1} \\ (-1)^{r+2}A_{r2}, & (-1)^{s+2}A'_{s2} \\ \cdot & \cdot \end{array}$$

so ergiebt sich das Komplement von b_{rs} in P als:

$$(-1)^{r+s}[A_{r1}A'_{s1} + A_{r2}A'_{s2} + \cdots + A_{rn}A'_{sn}]$$

und nach Multiplikation mit $(-1)^{r+s}$, um das algebraische Komplement zu gewinnen, erhält man genau das Element B_{rs} von Q. Hiermit ist der Lehrsatz bewiesen.

Zweiter Theil.

Besondere Untersuchungen über Determinanten; Anwendungen.

---

§ 9. Andere Methoden für die Entwicklung einer Determinante. Die Regel von Laplace.

Unter dem Namen der Regel von Sarrus ist eine Anweisung zur Entwicklung einer Determinante der dritten Ordnung bekannt:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Man denke sich die Elemente hervorgehoben, welche auf schneidenden Linien gelegen sind, die zu den beiden Diagonalen parallel verlaufen, und nenne komplementär diese Schnittlinien, wenn sie sich auf entgegengesetzten Seiten einer Diagonale befinden und wenn zudem die in beiden enthaltenen Elemente der Anzahl nach drei sind. So sind komplementär die beiden Schnittlinien:

$$a_{12}\ a_{23}$$

und

$$a_{31}$$

Man multipliziere mit einander alle in dem Hauptschnitt (Hauptdiagonale) enthaltenen Elemente und diejenigen auf den paarweis zu einander komplementären Schnittlinien, soweit sie zur Hauptdiagonale parallel verlaufen. Man erhält auf diese Weise drei Glieder der Entwicklung der gegebenen Determinante. Das nämliche Verfahren wende man auf die zweite Diagonale an und auf die zu ihr komplementären Schnittlinien; so ergeben sich drei weitere Glieder der Entwicklung und diese letzteren drei hat man mit negativem Zeichen zu versehen.

Die Gesammtheit der sechs Glieder stellt die Entwicklung der vorgelegten Determinante dar. Man bildet also die Summe der Pro-

dukte (mit positivem Vorzeichen genommen) der in der Hauptdiagonale enthaltenen Elemente und in den Paaren von komplementären Schnittlinien, die zu ihr parallel, und dann die Summe der Produkte (mit negativem Zeichen) aus den Elementen der Nebendiagonale und der zu ihr parallelen Paare komplementärer Schnittlinien.

Eine Erweiterung dieser Methode auf Determinanten beliebiger Ordnung ist in einer Arbeit von Bonolis gegeben. Gleichwohl ist es nicht nöthig bei dieser Betrachtung zu verweilen, da sie von wenig Belang ist.

Bonolis, Di un nuovo e semplice modo di sviluppare i determinanti di grado qualunque, e sua applicazione alla ricerca della risultante di due equazioni qualsivogliano. Giorn. di Batt. vol. 21 (1883) [336—342].

Wir führen hier noch an:

Teixeira, Processos expeditos para achar os desenvolvimentos de alguns determinantes. Jorn. de sc. math. vol. 11 (1892—93) [88—93].

Teixeira, Novo methodo de desenvolver os determinantes. Jorn. de sc. math. vol. 11 (1894) [173—187].

Eine Frage von nahe verwandter Art ist auch in einem Paragraphen des Aufsatzes von Albeggiani, Sviluppo di un determinante ad elementi polinomi. Giorn. di Batt. vol. 13 (1875) [1—32] S. 16 ff. besprochen.

Es handelt sich darum, brauchbare Anweisungen aufzustellen für die Bildung der verschiedenen Glieder der Determinantenentwicklung. Unter allen Umständen aber, das wollen wir wiederholen, sind dies Untersuchungen, denen man nur geringe Bedeutung beimessen kann.

Die Entwicklung einer Determinante betreffend müssen wir jedoch noch eine weitere Bemerkung hervorheben.

Wir haben oben dargestellt (Siehe S. 17), wie eine Determinante sich in eine Summe von Produkten entwickeln lässt, worin die in n_1 parallelen Reihen eingeschlossenen Minoren und die ihnen zugehörigen algebraischen Komplemente paarweise verbunden auftreten. Wenn man dann zu wiederholten Malen diesen Lehrsatz anwendet, so gelangt man naturgemäss zu dem folgenden:

Sind $n_1\, n_2 \cdots n_k$ ganze Zahlen von der Beschaffenheit, dass

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n,$$

und wählen wir in einer Determinante n-ter Ordnung n_1 Zeilen, dann weitere n_2, danach n_3 andere und so fort, heben eine beliebige Determinante, die in den ersten n_1 Zeilen enthalten ist, heraus, dann gleicherweise eine aus den zweiten n_2 Zeilen hervorgehende, deren Elemente jedoch nicht Spalten angehören dürfen, die schon bei Bildung der ersteren Determinante Berücksichtigung fanden, und setzen dies Verfahren ununterbrochen fort, so wird die Summe der

Produkte aller derartigen Kombinationen von k Determinanten, jedes mit geeignetem Zeichen versehen, die Entwicklung der gegebenen Determinante vorstellen.

Man würde auch ohne Schwierigkeit die Regel auffinden, nach der einem jeden so gebildeten Theilprodukte von k Faktoren sein Vorzeichen zu geben ist.

Ein jedes Glied der Entwicklung wird das Zeichen + oder — erhalten, jenachdem dem Produkte aller Hauptelemente der k Determinanten, die Faktoren dieses Gliedes sind, positives oder negatives Zeichen zukommt.

Diese Anweisung zur Entwicklung der Determinante führt den Namen der Laplaceschen Regel, sie ist indess in der vorliegenden (gegenüber dem Satz auf S. 17), erweiterten Fassung erst von Jacobi behandelt worden. Man vergleiche:

Vandermonde, Mémoire sur l'élimination. Mém. de l'ac. Paris. Année 1772. Sec. partie (1776) [516—532] S. 518.

Laplace, Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde. Mém. de l'ac. Paris. Année 1772. Sec. partie (1776) [267—376] Article 4, S. 297 wieder abgedruckt in Oeuvr. de Laplace t. 8. Paris 1891 [369—477] article 4. S. 395—406.

Jacobi, De formatione et proprietatibus determinantium. Journ. f. Math. Bd. 22 (1841) [285—318] S. 298 f., wieder abgedruckt in Jacobi, gesammelte Werke, Bd. 3. Berlin 1884 [357—392] S. 370 f. (Deutsche Ausgabe mit Anmerkungen durch Stäckel in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften N. 77.)

Schering, Analytische Theorie der Determinanten. (Art. 4: Zerlegung in Unterdeterminanten.) Ges. d. Wiss. Göttingen, Abhandl. Bd. 22. 1877 [3—42].

§ 10. Umwandlung einer Determinante.

Werden Minoren zweiter Ordnung eingeführt, so kann jede Determinante D der Ordnung n in der Gestalt einer Determinante der Ordnung $(n - 1)$ dargestellt werden.

Denn ziehen wir von der letzten Spalte, nachdem sie mit $a_{1,n-1}$ multipliziert worden, die vorausgehende, ihrerseits mit $a_{1,n}$ multipliziert, ab, vermindern darauf die vorletzte Spalte nach Multiplikation mit $a_{1,n-2}$ um die $(n - 2)$-te multipliziert mit $a_{1,n-1}$ und so weiter, so entsteht eine Determinante, in der die Elemente der ersten Zeile bis auf das erste Null sind und, weil ferner durch dies Verfahren die ursprüngliche Determinante mit $a_{1,n-1}\, a_{1,n-2} \cdots a_{1,1}$ multipliziert erscheint, so ergiebt sich nach Tilgung des Faktors a_{11} auf beiden Seiten der Gleichung:

$$a_{12} \cdots a_{1,n-1} D = \begin{vmatrix} (a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}), & \cdots & (a_{2n}a_{1,n-1} - a_{2,n-1}a_{1n}) \\ . & \cdots & . \\ . & \cdots & . \end{vmatrix}$$

Demnach wird D, abgesehen von einem Faktor, durch eine Determinante $(n - 1)$-ter Ordnung ausgedrückt, deren Elemente Minoren der zweiten Ordnung sind. Also gilt der Satz:

Unter der Voraussetzung, dass alle Minoren zweiter Ordnung einer vorgelegten Determinante durch p theilbar sind (ohne dass die Elemente selbst diese Eigenschaft haben), ist die gegebene Determinante durch p^{n-1} theilbar.

Janni, V., Dimostrazione di alcuni teoremi sui determinanti. Giorn. di Batt. vol. 12 (1874) [142—145] S. 143.

Dieser Lehrsatz kann als Erweiterung jenes anderen angesehen werden, welcher aussagt, dass eine Determinante der Ordnung n durch p^n theilbar ist, wenn alle ihre Elemente durch p theilbar sind.

Für die Determinante D gewinnt man noch eine Umwandlung, die der soeben angezeigten ähnlich ist, auf die folgende Weise. Von den Elementen der zweiten, dritten, ... Zeile zieht man, nachdem man sie mit a_{11} multipliziert hat, diejenigen der ersten Zeile ab, beziehungsweise mit a_{21}, a_{31}, ... multipliziert. Beachtet man, dass dann die Elemente der ersten Spalte, mit Ausnahme des ersten, alle verschwinden, so erhält man:

$$D = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}), & (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}), & \cdots & (a_{11}a_{2n} - a_{1n}a_{21}) \\ . & . & \cdots & . \\ (a_{11}a_{n2} - a_{12}a_{n1}), & (a_{11}a_{n3} - a_{13}a_{n1}), & \cdots & (a_{11}a_{nn} - a_{1n}a_{n1}) \end{vmatrix}$$

In dieser Formel stellt sich noch einmal das obige Ergebniss dar, dass nämlich die vorgelegte Determinante vermittelst einer anderen von der Ordnung $(n - 1)$ ausdrückbar ist, deren Elemente als Minoren zweiter Ordnung jener, der gegebenen, zugehören. Der Unterschied zwischen dieser Formel und der vorausgehenden besteht in Folgendem. Die Minoren zweiter Ordnung, welche hier als Elemente der umgewandelten Determinante auftreten, enthalten sämmtlich das Element a_{11}.

Es ist diese Formel noch verallgemeinert worden durch Studnička, der die neue Gleichung aufgestellt hat:

$$D = \frac{1}{\alpha_{ij}^{n-h}} \begin{vmatrix} (a_{11}a_{22} \cdots a_{h-1,h-1}a_{h,h}) & , (a_{11}a_{22} \cdots a_{h-1,h-1}a_{h+1,h}) & , \cdots \\ (a_{11}a_{22} \cdots a_{h-1,h-1}a_{h,h+1}), & (a_{11}a_{22} \cdots a_{h-1,h-1}a_{h+1,h+1}), & \cdots \\ . & . & \cdots \\ (a_{11}a_{22} \cdots a_{h-1,h-1}a_{h,n}) & , (a_{11}a_{22} \cdots a_{h-1,h-1}a_{h+1,n}) & , \cdots \end{vmatrix}$$

wo im Allgemeinen mit

$$(a_{11}\ a_{22}\ \cdots\ a_{h-1,h-1}\ a_{ij})$$

die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,h-1} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,h-1} & a_{2j} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{h-1,1} & a_{h-1,2} & \cdots & a_{h-1,h-1} & a_{h-1,j} \\ a_{i,1} & a_{i2} & \cdots & a_{i,h-1} & a_{ij} \end{vmatrix}$$

bezeichnet sein soll, bei $i, j = h, h + 1, \cdots n$, und mit α_{ij} ihre erste Unterdeterminante der Ordnung $(h - 1)$

$$(a_{11}\ a_{22}\ \ldots\ a_{h-1,h-1}).$$

Obige Formel lehrt:

Eine Determinante n-ter Ordnung lässt sich umwandeln in den Quotienten zweier Determinanten, wovon die eine von der Ordnung $(n - h + 1)$ ist und als Elemente ihrerseits Determinanten h-ter Ordnung hat, während die andere von der Ordnung $(h - 1)$ ist.

Studnička, Über eine neue Determinantentransformation. Böhm. Ges. Ber. Jahrg. 1879. Nr. 49 [489—494].

Eine weitere Art der Umwandlung einer Determinante besteht darin, dass man sie in die Form der sogenannten Differenzendeterminanten überführt.

Wir bezeichnen, wie man das gewöhnlich thut, mit

$$\Delta a_{11},\ \Delta a_{12},\ \cdots\ \Delta a_{1,n-1}$$

die Differenzen erster Ordnung der Grössen

$$a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1n}$$

das heisst, die Differenzen auf einander folgender Elemente der gedachten Reihe, also:

$$a_{12} - a_{11},\ a_{13} - a_{12},\ \cdots\ a_{1n} - a_{1,n-1},$$

des Weiteren mit

$$\Delta^2 a_{11},\ \Delta^2 a_{12},\ \cdots$$

die Differenzen zu der Reihe der ersten Differenzen (man nennt sie Differenzen zweiter Ordnung oder zweite Differenzen). Demgemäss fahren wir dann fort.

Ziehen wir nun von den Elementen einer jeden Spalte der gegebenen Determinante die Elemente der vorausgehenden Spalte ab, so ergiebt sich:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \Delta a_{11} & \Delta a_{12} & \cdots & \Delta a_{1,n-1} \\ a_{21} & \Delta a_{21} & \Delta a_{22} & \cdots & \Delta a_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{vmatrix}$$

Hieran wiederholen wir dasselbe Verfahren, indem wir bei der dritten Spalte Halt machen, danach wieder behandeln wir die so entstandene Determinante auf entsprechende Weise, bis wir bei solchem Fortschreiten zu der Determinante gelangen:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \Delta a_{11} & \Delta^2 a_{11} & \cdots & \Delta^{n-1} a_{11} \\ a_{21} & \Delta a_{21} & \Delta^2 a_{21} & \cdots & \Delta^{n-1} a_{21} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{vmatrix}$$

Hieraus ergiebt sich leicht der Lehrsatz:

Eine Determinante ist Null, wenn die Elemente einer jeden Zeile eine arithmetische Reihe darstellen, deren Ordnung nicht grösser ist, als $(n - 2)$.

Da nämlich eine arithmetische Reihe als Reihe n-ter Ordnung benannt wird, wenn ihre n-ten Differenzen konstant sind, so werden bei gedachten Voraussetzungen die Differenzen von der Ordnung $(n - 2)$ oder von niedrigerer Ordnung konstant, die Elemente der letzten Spalte in der Umwandlungsform unserer Determinante also Null sein.

Wendet man überdies das nämliche Verfahren zur Darstellung von Differenzdeterminanten auf die Determinanten h-ter Ordnung an, die bei der vorausgehend besprochenen Umwandlung einer Determinante als Elemente erscheinen, so tritt dieser weitere bemerkenswerthe Lehrsatz hervor:

Eine Determinante ist Null, wenn die Elemente von h Zeilen oder Spalten arithmetische Reihen bilden, deren Ordnung nicht grösser ist, als $(h - 2)$.

Studnička, Neuer Beitrag zur Theorie der Determinanten. Böhm. Ges. Ber. Jahrg. 1896. Nr. 6 [1—5].

§ 11. Potenz-Entwicklung einer Determinante nach besonderen in ihr vorkommenden Grössen.

In einer allgemeinen Determinante mit den Elementen a_{ij} denken wir uns zu allen Hauptelementen x hinzugefügt.

Wir wollen bei Entwicklung dieser Determinante eine Ordnung der Glieder gemäss den Potenzen von x eintreten lassen.

Der gewöhnliche Weg, den man zu diesem Ziele wählen kann,

ist der folgende. Man denkt sich die Determinante in der Form geschrieben:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x, & a_{12}+0, & \cdots & a_{1n}+0 \\ a_{21}+0, & a_{22}+x, & \cdots & a_{2n}+0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1}+0, & a_{n2}+0, & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

und zerlegt nach der üblichen Regel (§ 2, 9) diese Determinante mit binomischen Elementen in andere Determinanten mit einfachen Elementen.

Der Theil, der von x frei ist, wird durch die Determinante der a_{ij} geliefert, der den Faktor x in der ersten Potenz enthaltende Abschnitt ergiebt sich, wenn man bekanntermaassen die zweiten Glieder der Elemente jeder einzelnen Spalte je mit den ersten Gliedern der Elemente aller andern verbindet.

Zum Beispiel wird eines der Glieder, in denen x im ersten Grade vorkommt, durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

dargestellt, deren Werth

$$x \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ist. Hier ist der zweite Faktor ein Hauptminor (diagonaler Minor) von der Ordnung $(n-1)$ der gegebenen Determinante. Die übrigen Glieder mit x enthalten als Koeffizienten alle die andern $(n-1)$ diagonalen Minoren der Ordnung $(n-1)$. Wir können daher behaupten: Der Koeffizient der ersten Potenz von x in der Entwicklung unserer Determinante wird durch die Summe sämmtlicher Hauptminoren $(n-1)$-ter Ordnung aus der Determinante der a_{ij} gebildet. Desgleichen ist der Koeffizient des Gliedes mit x^2 die Summe aller diagonalen Minoren $(n-2)$-ter Ordnung und so weiter.

Eine Entwicklung der Determinante, die bei einiger Verschiedenheit doch viel Aehnlichkeit mit der hier besprochenen zeigt, findet man in Mittheilungen von Capelli.

Eine noch allgemeinere Entwicklung enthält eine neuere Arbeit von Cazzaniga.

Capelli, Sopra certi sviluppi di determinanti. Acc. di Nap. Rend. ser. 2, vol. 3. anno 28 (marzo 1889).

Capelli, Sur les déterminants dont les éléments principaux varient en progression arithmétique. Nouv. ann. de math. 3e. sér. t. 14 (1895) [62—63].

Cazzaniga, Sopra i determinanti di cui gli elementi principali variano in progressione aritmetica. Ist. Lomb. Rend. ser. 2, vol. 29 (maggio 1896) [541—558].

§ 12. Entwicklung der geränderten Determinanten. Darstellung einer Determinante durch die Elemente einer Zeile und einer Spalte.

Man pflegt eine Determinante D gesäumt oder auch gerändert zu nennen, wenn sie aus einer andern Determinante A von niedrigerer Ordnung durch Hinzufügung einer gewissen Anzahl von Zeilen und ebensoviel Spalten gebildet ist.

Wir wollen zunächst voraussetzen, es handle sich dabei nur um eine Zeile und um eine Spalte. Wir bilden also:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \alpha_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & \alpha_2 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & \alpha_n \\ \beta_1 & \cdots & \beta_n & \gamma \end{vmatrix}$$

Nun wollen wir für eine solche Determinante eine Entwicklung suchen dergestalt, dass die Produkte der α mit den β hervortreten.

Augenscheinlich ist das Glied, welches γ enthält,

$$A \cdot \gamma$$

wenn unter A die ursprüngliche Determinante verstanden wird; denn in keinem einzigen andern Gliede erscheint der Faktor γ. Prüfen wir, von welcher Art der Faktor ist, der in der Gesammtentwicklung zu dem Produkte $\alpha_i \beta_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots n)$ hinzutritt. Wir betrachten den Minor 2-ter Ordnung

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & \alpha_i \\ \beta_j & \gamma \end{vmatrix}$$

Erinnern wir uns der Anweisung für die Entwicklung der Determinanten nach Produkten von Minoren, so sehen wir unmittelbar, dass den andern Faktor, mit dem dieser Minor in gedachter Entwicklung multipliziert erscheint, das Komplement des Elementes a_{ij} innerhalb der Determinante A darstellt. Dies werden wir mit A_{ij} bezeichnen. Überdies wird das Zeichen, welches dem Produkte

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & \alpha_i \\ \beta_j & \gamma \end{vmatrix} \cdot A_{ij}$$

in der Entwicklung unserer Determinante gebührt, dem Zeichen von

$$(-1)^{i+n+1+j+n+1} = (-1)^{i+j}$$

entsprechen.

Nun leuchtet ohne Weiteres ein, dass die Verbindung $(\alpha_i . \beta_j)$ einzig und allein in Gliedern vorkommt, die dem soeben verzeichneten Produkte zugehören, und zwar darin mit dem Koeffizienten erscheint:

$$-(-1)^{i+j} A_{ij}$$

Wenn wir bedenken, dass in der Entwicklung der Determinante D jedes Glied entweder den Faktor γ enthalten wird, oder ein Produkt nach Art von $(\alpha_i \beta_j)$, können wir schliesslich die Entwicklung von D in der Form (Cauchy) niederschreiben:

$$D = \gamma A - \sum_{ij} (-1)^{i+j} \alpha_i \beta_j A_{ij}$$

wobei wir die Summierung ausdehnen auf alle $i, j = 1, 2, \ldots n$.

Man wird nun eine ähnliche Untersuchung anstellen können, wenn man, anstatt nur eine Zeile und eine Spalte hinzuzufügen, die Matrix der Determinante um r Zeilen und r Spalten erweitert.

Man ersieht hiernach, wie eine Determinante sich in der Art entwickeln lässt, dass (abgesehen von dem Gliede γA) ein bilinearer Ausdruck in den Elementen einer Zeile und einer Spalte hervorgeht.

Wir haben hier den folgenden Satz von Hesse anzumerken, der den Fall betrifft, wo ein solcher bilinearer Ausdruck sich in das Produkt zweier linearen Funktionen zerfällen lässt.

Hesse, Ein Determinantensatz. Journ. f. Math. Bd. 69 (1868) [319—322], wieder abgedruckt in Hesse, Gesammelte Werke. München 1897 [557—560].

Hierzu kann man noch vergleichen

Weierstrass, Über ein die homogenen Funktionen zweiten Grades betreffendes Theorem, nebst Anwendung desselben auf die Theorie der kleinen Schwingungen. Akad. Berlin. Monatsber. 1858 (März 1858) [207—220] S. 211. Wieder abgedruckt in Weierstrass, Mathem. Werke. Bd. 1. Berlin 1894 [233—246].

Wenn das Komplement A_{ij} eines Elementes a_{ij} der gegebenen Determinante A Null ist, so ist diese in zwei Faktoren zerlegbar, von denen jeder linear und mit gebrochenen Koeffizienten zusammengesetzt ist aus den mit a_{ij} in einer Reihe befindlichen Elementen, der eine aus den Elementen:

$$a_{i1} \; a_{i2} \; \ldots \; a_{i,j-1} \; a_{i,j+1} \; \ldots \; a_{in}$$

der andere aus:

$$a_{1j} \; a_{2j} \; \ldots \; a_{i-1,j} \; a_{i+1,j} \; \ldots \; a_{nj}$$

Setzen wir einmal der Einfachheit wegen voraus, A_{11} sei Null und betrachten in der zur gegebenen reziproken Determinante den Minor

der also dem Produkt

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} - A_{12}A_{21}$$

gleich sein wird.

Nach den Eigenschaften der reziproken Determinante ist dieser Minor gleich $A \,.\, A_{11,\,22}$, wenn wir mit $A_{11,\,22}$ den Minor bezeichnen, der aus A hervorgeht, wenn man darin die erste und zweite Zeile und die erste und zweite Spalte unterdrückt. Mithin erhalten wir die Gleichung:

$$A \,.\, A_{11,\,22} = - A_{12}A_{21} \,.$$

Entwickeln wir nun A_{12}, A_{21} nach den Elementen der ersten Spalte und der ersten Zeile, so erhalten wir bei gleicher Bezeichnungsweise:

$$A_{12} = a_{21}A_{11,22} - a_{31}A_{11,32} + \cdots \pm a_{n1}A_{11,n2}$$
$$A_{21} = a_{12}A_{11,22} - a_{13}A_{11,23} + \cdots \pm a_{1n}A_{11,2n}$$

Die $A_{11,ij}$ enthalten nicht mehr die Elemente:

$$a_{21} \cdots a_{n1}$$
$$a_{12} \cdots a_{1n}$$

und so ergiebt sich für A eine Darstellung als Produkt zweier linearen Funktionen der gedachten Elemente mit Koeffizienten, welche das Verhältniss von Grössen ausdrücken, in denen nur die andern Elemente vorkommen.

Über die geränderten Determinanten lese man noch eine Arbeit von Arnaldi und vergleiche § 52 dieses Buches.

Arnaldi, Sui determinanti orlati e sullo sviluppo di un determinante per determinanti orlati. Giorn. di Batt. vol 34 (1896) [209—214].

§ 13. Anzahl der Glieder, die besondere Elemente enthalten.

Eine Untersuchung, die mit der in den vorangehenden Paragraphen dargestellten nahe verwandt ist, bezieht sich auf die Zahl derjenigen Entwicklungsglieder einer n-reihigen Determinante, in denen nur k diagonale Elemente (also auf der Hauptdiagonale befindliche) vorkommen.

Wir wollen die Berechnung in folgender Weise ausführen. Wir betrachten den ersten Hauptminor k-ter Ordnung. Eines seiner Glieder wird das Produkt der ersten k Hauptelemente sein. Alle Glieder, die diese k Hauptelemente als Faktoren enthalten, werden der Zahl nach

durch die Anzahl der Entwicklungsglieder gegeben, die dem Komplemente jenes ausgewählten Hauptminors zugehören, das heisst, sie werden durch die Zahl $(n - k)!$ bestimmt. Nun kann man k Hauptelemente auf so vielfache Weise auswählen, als der Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = (n)_k$$

Einheiten hat, folglich wird durch

$$(n - k)!\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!}$$

die Anzahl der Glieder gegeben, die k oder mehr Hauptelemente enthalten. Jedoch ist zu bemerken, dass bei dieser Berechnung gewisse Glieder mehrere Male gezählt sind. Diejenigen Glieder, in denen nur k und nicht mehr Hauptelemente vorkommen, sind nur einmal gezählt, aber die $(k + 1)$ Hauptelemente enthaltenden sind $(k + 1)_1$ mal gezählt, und so $(k + 2)_2$ mal die, welche $(k + 2)$ Hauptelemente enthalten. Bezeichnen wir mit s_k die Zahl der Glieder, in denen sich nur k Hauptelemente finden, so bekommen wir daher die Rekursionsformel:

$$s_k + \binom{k+1}{1} s_{k+1} + \binom{k+2}{2} s_{k+2} + \cdots + \binom{n}{n-k} s_n = \frac{n!}{k!} = S_k$$

Aus dieser Formel geht hervor, was übrigens an und für sich auch einleuchtet, dass $s_n = 1$, $s_{n-1} = 0$.

Wir setzen nun der Reihe nach $k = 1, 2, \ldots n$ und bilden das Aggregat:

$$S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5 - \cdots - (-1)^n S_n =$$
$$= n!\left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots - (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

In diesem Ausdruck ist der Koeffizient von s_k

$$\binom{k}{k-1} - \binom{k}{k-2} + \binom{k}{k-3} - \cdots = 1 - (1-1)^k = 1$$

das heisst, es erhalten darin alle s_k zu Koeffizienten $+1$. Es wird daher:

$$s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n = n!\left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots - (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

Mithin lässt sich behaupten:

Die Anzahl ψ_n der Glieder ohne Hauptelemente beträgt $n!$, vermindert um die durch das zuletzt verzeichnete Aggregat dargestellte Zahl, also

$$\psi_n = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

Was die Literatur über diesen Gegenstand anbetrifft, so kann man einsehen:

Cayley, Sur les déterminants gauches. Journ. f. Math. Bd. 38 (1849) [93—96] wieder abgedruckt in Cayley, The collected mathematical papers. vol. 1. Cambridge 1889 [410—413].

Weyrauch, Zur Theorie der Determinanten. Journ. f. Math. Bd. 74 (1872) [273—276].

Monro, Baltzer on the number of terms in a determinant with a vanishing diagonal. Mess. of math. vol. 2 (1872) S. 38 f.

Baltzer, Mathematische Bemerkungen in den Ber. d. Ges. d. Wiss. Leipzig. 1873. Bd. 25. [523—537] S. 534 f.

Baltzer, Determ. 1881. S. 39 ff.

v. Szüts, Zur Theorie der Determinanten. M. A. Bd. 33 (1889) [477—492].

§ 14. Die Abgeleitete einer Determinante. Determinanten von Wronski.

Denken wir uns einmal, jedes Element einer Determinante stelle eine unabhängige Veränderliche vor. Dann erhellt gemäss der Anweisung zur Entwicklung der Determinante ohne Weiteres die folgende Eigenschaft:

Die mit Bezug auf ein beliebiges ihrer Elemente gebildete Abgeleitete der Determinante ist gleich dem algebraischen Komplement dieses Elementes.

Nehmen wir nun an, alle Elemente der Determinante wären Funktionen einer Veränderlichen x.

Es mögen also in der Determinante:

$$U = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{vmatrix}$$

die u Funktionen von x sein.

Nach dem Lehrsatze über die Differentiation zusammengesetzter Funktionen ist im Allgemeinen:

$$\frac{dU}{dx} = \sum_{rs} \frac{\partial U}{\partial u_{rs}} \frac{du_{rs}}{dx} = \sum_{rs} U_{rs} \frac{du_{rs}}{dx}$$

wenn wir mit U_{rs} das algebraische Komplement zu u_{rs} in U bezeichnen.

Führen wir die Summation mit Bezug auf s aus und setzen:

$$\frac{du_{rs}}{dx} = u'_{rs}$$

so erhalten wir:

$$\frac{dU}{dx} = \begin{vmatrix} u'_{11} & u'_{12} & \cdots & u'_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u'_{21} & u'_{22} & \cdots & u'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

Die Regel zur Bildung der Abgeleiteten lautet also:

Man bilde die Summe von n Determinanten der Art, dass eine jede aus der gegebenen hervorgeht, wenn man an Stelle der Elemente einer Zeile (Reihe) die entsprechenden Ableitungen dieser Elemente einsetzt.

Besondere Beachtung verdienen auch Determinanten, die auf folgende Weise gebildet sind. Auf einer Zeile (Reihe) stehen da als Elemente n Funktionen von x, auf einer zweiten Zeile die Abgeleiteten dieser Funktionen, auf einer dritten Zeile die zweiten Ableitungen und so weiter bis zur n-ten Zeile, wo sich die Abgeleiteten (n—1)-ter Ordnung der nämlichen Funktionen finden.

Solche Determinante der n Funktionen (auch Determinante des Funktionensystems genannt) pflegt man neuerlich nach dem Namen des Philosophen und Mathematikers Wronski zu bezeichnen; sie ist von Nutzen bei der Untersuchung der linearen Abhängigkeit oder Unabhängigkeit von n gegebenen Funktionen.

Heffter, Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variablen. Leipzig 1894 S. 46 ff.

Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Bd. 1. Leipzig 1895. S. 36 ff.

Kritische Anmerkungen zu dem Hauptsatze über die Wronskischen Determinanten lieferte Peano. Man lese

Peano, Sur le déterminant wronskien. Mathesis. vol. 9 (1889) [75—76, 110—112].

Peano, Sul determinante wronskiano. Roma Acc. Linc. Rend. ser. 5, vol. 6. 1° sem. (1897) [413—415].

Es ist zunächst eine wichtige Eigenschaft solcher Determinanten, dass ihre erste Ableitung mit Bezug auf x sich ergiebt, wenn man einfach an Stelle der Elemente jener Zeile, wo die Abgeleiteten (n—1)-ter Ordnung stehen, die Abgeleiteten n-ter Ordnung derselben Funktionen einsetzt.

Malmstén, Moyens pour trouver l'expression de la $n^{\text{ième}}$ intégrale particulière de l'équation linéaire $y^{(n)} + Py^{(n-1)} + Qy^{(n-2)} + \cdots + Sy' + Ty = 0$ à l'aide des $(n-1)$ valeurs $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ qui satisfont à cette équation. Journ. f. Math. Bd. 39. (1850) [91—98] S. 93.

Es sei:

$$W = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1' & u_2' & \cdots & u_n' \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Bildet man ihre Ableitung mit Bezug auf x nach der vorher gegebenen Regel, so werden, wie man leicht erkennt, die $(n-1)$ ersten Determinanten Null, da ja in ihnen stets zwei identische Zeilen auftreten, und es bleibt von dem ganzen Aggregat einzig die letzte Determinante übrig, also wird:

$$\frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1' & u_2' & \cdots & u_n' \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ u_1^{(n-2)} & u_2^{(n-2)} & \cdots & u_n^{(n-2)} \\ u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \cdots & u_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Eine zweite Eigenschaft der Wronskischen Determinanten spricht sich in folgendem Satze aus:

Wenn man die Funktionen $u_1 \cdots u_n$ mit einer beliebigen Funktion u multipliziert, so erscheint die ganze Determinante dadurch mit u^n multipliziert.

Wirklich werden die Elemente der zweiten Zeile hierdurch verwandelt in:

$$\frac{d}{dx}(u\,u_1) \qquad \frac{d}{dx}(u\,u_2) \quad \cdots$$

die der dritten Zeile werden:

$$\frac{d^2}{dx^2}(u\,u_1) \qquad \frac{d^2}{dx^2}(u\,u_2) \quad \cdots$$

Entwickeln wir diese Abgeleiteten nach der bekannten Leibnitzschen Regel und zerlegen die Determinante mit mehrgliedrigen Elementen, die dabei entsteht, in ein Aggregat der entsprechenden Anzahl von Determinanten mit einfachen Elementen, so finden wir, dass einige davon Null sind, weil bei ihnen die Elemente einer Zeile als die gleichen Vielfachen derer einer parallelen Zeile auftreten, und dass eine einzige von Null verschieden ist und zwar der ursprünglichen Determinante gleich, wenn man nur in dieser alle Elemente mit u multipliziert denkt.

Die zuletzt erörterte Eigenschaft der Wronskischen Determinanten (daneben auch ihre S. 48 einleitend erwähnte Bedeutung für das zugehörige Funktionensystem) finden sich bei:

Hesse, Über die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale. Journ. f. Math. Bd. 54 (1857) [227—273] S. 249. Wieder abgedruckt in Hesse, Gesammelte Werke, München 1897 [413—467].

Christoffel, Über die lineare Abhängigkeit von Funktionen einer einzigen Veränderlichen. Journ. f. Math. Bd. 55 (1858) [281—299] S. 298.

Frobenius, Über den Begriff der Irreduktibilität in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Journ. f. Math. Bd. 76 (1873) [236—270] S. 238.

Frobenius, Über die Determinante mehrerer Funktionen einer Variabeln. Journ. f. Math. Bd. 77 (1874) [245—257].

Pasch, Note über die Determinanten, welche aus Funktionen und deren Differentialen gebildet werden. Journ. f. Math. Bd. 80 (1875) [177—182].

Studnička hat neuerdings eine besondere Art von Wronskischen Determinanten behandelt, die der Klasse der Determinanten Hankels (Siehe § 19) zugehört. Es wird zu ihrer Bildung die Annahme gemacht, die Elemente $u_2, u_3, \ldots u_n$ der ersten Zeile unserer Wronskischen Determinante wären die auf einander folgenden Ableitungen $u_1', u_1'', \ldots u_1^{(n-1)}$ des Anfangselementes u_1.

Studnička, Über eine neue Art von Derivationsdeterminanten. Monatsh. f. Math. Jahrg. 10 (1899) [338—342].

§ 15. Eigenschaften der Minoren, welche der Produktdeterminante aus zwei gegebenen angehören.

Es ist mitgetheilt worden, dass, wenn die zwei zu multiplizierenden Determinanten nicht von derselben Ordnung sind, es zuerst nöthig sein wird, sie auf dieselbe Ordnung zu bringen, und das geschieht auf sehr einfache Weise, indem man der Determinante niedrigerer Ordnung passend Zeilen und Spalten mit Elementen 0 und 1 hinzufügt. Danach wird das Produkt nach der gewöhnlichen Anweisung hergestellt.

Nun ist es von Wichtigkeit, die folgende Bemerkung über die Bildung der Produktdeterminante zu machen, die gerade auch für den Fall gilt, wo eine der Determinanten niederer Ordnung als die andere ist, eine Bemerkung, die dazu dienen kann, auf eine neue Art den Lehrsatz von der Multiplikation der Determinanten nachzuweisen.

Man vergleiche

König, Ein Beweis des Multiplikationstheorems für Determinanten. Math. Ann. Bd. 14 (1879) [507—509].

Wir wollen mit der Voraussetzung beginnen, es handle sich um das Produkt einer Determinante zweiter Ordnung und einer von der Ordnung n.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} \cdots b_{1n} \\ b_{21} \cdots b_{2n} \\ \cdot \;\cdots\; \cdot \\ b_{n1} \cdots b_{nn} \end{vmatrix} = A^{(2)}.\ B$$

Wir multiplizieren die Elemente der ersten Zeile der Determinante B mit a_{11} und fügen dann die Elemente der zweiten Zeile, mit a_{21} multipliziert, hinzu; wenn wir ausserdem die Elemente der zweiten Zeile mit $A^{(2)}$ multiplizieren, so erhalten wir:

$$A^{(2)}\, a_{11}\, B = \begin{vmatrix} a_{11}\, b_{11} + a_{21}\, b_{21}, & a_{11}\, b_{12} + a_{21}\, b_{22}, & \cdots & a_{11}\, b_{1n} + a_{21}\, b_{2n} \\ A^{(2)}\, b_{21} & A^{(2)}\, b_{22} & \cdots & A^{(2)}\, b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Zu den Elementen der zweiten Zeile fügen wir diejenigen der ersten, nachdem wir sie mit a_{12} multipliziert. Danach tilgen wir den Faktor a_{11} auf der rechten und linken Seite der Gleichung und es bleibt:

$$A^{(2)}.\ B = \begin{vmatrix} a_{11}\, b_{11} + a_{21}\, b_{21}, & a_{11}\, b_{12} + a_{21}\, b_{22}, & \cdots & a_{11}\, b_{1n} + a_{21}\, b_{2n} \\ a_{12}\, b_{11} + a_{22}\, b_{21}, & a_{12}\, b_{12} + a_{22}\, b_{22}, & \cdots & a_{12}\, b_{1n} + a_{22}\, b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Wir bezeichnen nun mit $A^{(3)}$ die Determinante:

$$A^{(3)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Fügen wir zu den Elementen der ersten und zweiten Zeile im vorausgehenden Produkt die Elemente der dritten, multipliziert beziehungsweise mit a_{31}, a_{32} und multiplizieren dann noch die Elemente der dritten Zeile mit $A^{(3)}$, so geht hervor:

$$A^{(2)}.\ A^{(3)}.\ B = \begin{vmatrix} a_{11}\, b_{11} + a_{21}\, b_{21} + a_{31}\, b_{31}, & a_{11}\, b_{12} + a_{21}\, b_{22} + a_{31}\, b_{32}, & \cdots \\ a_{12}\, b_{11} + a_{22}\, b_{21} + a_{32}\, b_{31}, & a_{12}\, b_{12} + a_{22}\, b_{22} + a_{32}\, b_{32}, & \cdots \\ A^{(3)}\, b_{31} & A^{(3)}\, b_{32} & \cdots \\ b_{41} & b_{42} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \end{vmatrix}$$

Und wenn wir nun zur dritten Zeile die Elemente der ersten und der zweiten Zeile addieren, beziehungsweise mit den algebraischen Komplementen der Elemente a_{31}, a_{32} innerhalb der Determinante $A^{(3)}$ multipliziert, so erhalten wir zum Schluss nach leichter Umwandlung:

$$A^{(3)}.\ B = \begin{vmatrix} a_{11}\,b_{11} + a_{21}\,b_{21} + a_{31}\,b_{31}, & a_{11}\,b_{12} + a_{21}\,b_{22} + a_{31}\,b_{32}, & \cdots \\ a_{12}\,b_{11} + a_{22}\,b_{21} + a_{32}\,b_{31}, & a_{12}\,b_{12} + a_{22}\,b_{22} + a_{32}\,b_{32}, & \cdots \\ a_{13}\,b_{11} + a_{23}\,b_{21} + a_{33}\,b_{31}, & a_{13}\,b_{12} + a_{23}\,b_{22} + a_{33}\,b_{32}, & \cdots \\ b_{41} & b_{42} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \end{vmatrix}$$

Wir würden immer nach derselben Methode fortfahren können und die Produkte von B mit $A^{(4)}$, mit $A^{(5)}, \ldots$ finden. Das Bildungsgesetz dieser Produkte leuchtet ein; es würde sich nachweisen lassen, dass es, wenn für den Index i giltig, auch für den Index $(i + 1)$ noch zu Recht besteht. Wenn die erste Determinante die Ordnung n erhält, kommt man demnach zurück auf die gewöhnliche Anweisung für das Produkt zweier Determinanten derselben Ordnung.

Die gedachten Produkte von $A^{(2)}$, $A^{(3)} \ldots$ in B können auch unmittelbar nach der gewöhnlichen Regel hergestellt werden, indem man zuerst das Verfahren anwendet, an das wir im Anfang dieses Paragraphen erinnert haben. Die Wichtigkeit der hier erörterten Betrachtungen beruht jedoch darauf, dass man auf diesem Wege ohne Weiteres zu der gebräuchlichen Regel für die Produktbildung gelangen kann, die gemeiniglich auf eine abweichende Art nachgewiesen wird. Und hierzu lässt ja auch König am angeführten Orte seine Betrachtung dienen.

Andere Arbeiten, in denen sich eine Darlegung der Produktbildung zweier Determinanten vorfindet, sind:

Janni, V., Sul prodotto di due matrici. Giorn. di Batt. vol. 11 (1873) S. 357. 358.

Le Paige, Sur la règle de multiplication des déterminants. Bull. soc. math. de Fr. vol. 9 (1881) [67—69].

De Presle, Multiplication de deux déterminants de même degré. Bull. soc. math. de Fr. vol. 14 (1886) S. 157. 158.

Das Produkt zweier Determinanten von derselben Ordnung

$$A = |a|, \quad B = |b|$$

lässt sich, wie wir wissen, auf vierfache Weise ausführen; nämlich entweder verbindet man die Zeilen der einen Determinante mit den Zeilen der andern, oder die Zeilen der ersten mit den Spalten der zweiten, oder die Spalten der ersten mit den Zeilen der zweiten, oder schliesslich die Spalten der einen mit den Spalten der andern.

Wir wollen das Produkt einmal nach der ersten und einmal nach der letzten dieser vier Verfahrensweisen ausführen und annehmen, dass wir in den beiden Fällen beziehungsweise die Ergebnisse bekommen:

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{vmatrix}$$

Dabei sind:

$$c_{rs} = a_{r1} b_{s1} + a_{r2} b_{s2} + \cdots$$

$$\gamma_{rs} = a_{1r} b_{1s} + a_{2r} b_{2s} + \cdots$$

Diese beiden Determinanten sind natürlich einander gleich, obschon ihre gleichliegenden Elemente verschieden sind.

Wir machen nun die werthvolle Beobachtung, dass zwischen gewissen Unterdeterminanten von C und den ihnen entsprechenden in Γ sehr einfache lineare, homogene Beziehungen bestehen.

Wir wollen jetzt andeutungsweise von derartigen Beziehungen, wie sie Weltzien gegeben hat, berichten.

Weltzien, Über das Produkt zweier Determinanten. Math. Ann. Bd. 42 (1893) [598—600].

Dabei kommt die, von uns schon auf S. 11 eingeführte, bequeme Benennung zur Anwendung für Minoren, deren sämmtliche Hauptelemente auch Hauptelemente der vorgelegten Determinante sind.

Es lässt sich dann der folgende elegante Lehrsatz beweisen:

Die Summe aller diagonalen Minoren der Ordnung k in C ist gleich der Summe der diagonalen Minoren der Ordnung k in Γ.

Dieser Lehrsatz sagt für den besonderen Fall $k = n$ die Thatsache aus, dass $C = \Gamma$ wird.

Für $k = 1$ ergiebt sich im Besonderen auch, dass die Summe aller diagonalen Elemente von C gleich der Summe der diagonalen Elemente von Γ ist.

Für diesen letzteren Satz wird der Nachweis sofort erbracht,

wenn man beachtet, dass die Summe der diagonalen Elemente von C sich in der Form

$$\sum_{r,i} a_{ri} b_{ri}$$

darstellen lässt, wobei die Indices r, i alle möglichen Werthe $1, 2, \ldots n$ annehmen sollen, und dass in gleicher Gestalt auch die Summe der diagonalen Elemente von Γ erscheint.

Nehmen wir ferner der Einfachheit wegen $n = 4$ an, so ergiebt sich gemäss dem oben angeführten Lehrsatze das Bestehen der folgenden Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{13} \\ c_{31} & c_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{14} \\ c_{41} & c_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{22} & c_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{22} & c_{24} \\ c_{42} & c_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{33} & c_{34} \\ c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{13} \\ \gamma_{31} & \gamma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{14} \\ \gamma_{41} & \gamma_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_{22} & \gamma_{24} \\ \gamma_{42} & \gamma_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_{33} & \gamma_{34} \\ \gamma_{43} & \gamma_{44} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{24} \\ c_{41} & c_{42} & c_{44} \end{vmatrix} + \cdots = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{14} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{24} \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{44} \end{vmatrix} + \cdots$$

Zum Beweise unseres Lehrsatzes haben wir einer Eigenschaft zu gedenken, die schon im Anschluss an die Erörterung der Produktbildung aus zwei Determinanten aufgezeigt wurde; wir wissen nämlich, dass ein Minor des Produktes zweier Determinanten gleich dem Produkt zweier Matrices ist, die in den beiden gegebenen Determinanten enthalten sind, und man kann hinzufügen, dass, wenn es sich um einen diagonalen Minor handelt, dann die zu multiplizierenden Matrices gerade zwei homologe Matrices in den beiden Determinanten darstellen. (Siehe den Schluss von § 7.)

Nach dieser Bemerkung ist ein jeder der diagonalen Minoren k-ter Ordnung von C nichts andres, als die Summe der Produkte von Minoren k-ter Ordnung von A in ihre homologen Minoren in B, und die Summe aller diagonalen Minoren k-ter Ordnung von C ist nichts andres, als die Summe der Produkte, in denen sämmtliche in A enthaltenen Minoren k-ter Ordnung mit den zu ihnen homologen aus B multipliziert erscheinen. Da man demnach dasselbe von der Determinante Γ behaupten kann, so ergiebt sich, dass die beiden Summen von Diagonalminoren k-ter Ordnung, in C und in Γ, unter einander gleich sind.

Bei Gelegenheit unserer Beweisführung ist ersichtlich geworden, und wir wollen dies in der Form eines Lehrsatzes hervorheben:

Die Summe aller diagonalen Minoren der Ordnung k, enthalten in der Produktdeterminante $C = A.B$ ist der Summe der Produkte gleich aller Minoren der Ordnung k aus A, multipliziert ein jeder mit seinem homologen aus B.

Dieser Lehrsatz, der leicht auch für den Fall nicht diagonaler Minoren sich als giltig aufzeigen lässt, findet sich wohl zum ersten Male in einer Abhandlung von Picquet.

Mit Bezug auf die Darstellung eines Minors des Produktes mit Hilfe der Minoren gleicher Ordnung der das Produkt bildenden Faktoren kann man einen Aufsatz Hesses vergleichen.

Picquet, Mémoire sur l'application du calcul des combinaisons à la théorie des déterminants. Journ. de l'éc. pol. cah. 45 t. 28 (1878) [201—243] S. 203.

Hesse, Über Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie, insbesondere auf Kurven vierter Ordnung. Journ. f. Math. Bd. 49 (1855) [243—264] S. 243 ff. Wieder abgedruckt in Hesse, Gesammelte Werke, München 1897 [319—343].

§ 16. Symmetrische, schiefe, halbsymmetrische Determinanten.

Es sei eine Determinante vorgelegt, von Elementen a gebildet. Wenn nun darin

$$a_{rs} = a_{sr}$$

ist, so heisst die Determinante symmetrisch; es sind dann die Elemente gleich, die mit Bezug auf die Hauptdiagonale symmetrisch angeordnet sind.

Wenn

$$a_{rs} = -a_{sr} \quad (r \neq s)$$

dann nennt man die Determinante schief, und wenn zudem

$$a_{rr} = 0$$

angenommen wird, schiefsymmetrisch. Diese Determinante wird auch halbsymmetrisch (hemisymmetrisch) genannt. Die Elemente a_{rs}, a_{sr} kann man als konjugierte bezeichnen.

Jeder diagonale Minor einer symmetrischen Determinante ist auch symmetrisch;

denn man leitet ja aus der ursprünglichen Determinante einen diagonalen Minor her, wenn man Zeilen und Spalten, die sich auf der Hauptdiagonale kreuzen, unterdrückt, und wenn diese das Element a_{rs} enthalten, so werden sie auch a_{sr} enthalten. Es werden also auf diese Weise lauter Elemente fortgenommen, die zu zwei und zwei konjugiert sind; die zurückbleibenden werden auch paarweis konjugiert sein und mit Bezug auf die Diagonale symmetrisch geordnet.

Aus der begrifflichen Erklärung der symmetrischen Determinante erhellt sogleich, dass diese auch dem sinnbildlichen Schema nach unverändert bleibt, wenn man ihre Zeilen und Spalten vertauscht. Beachtet man dann, dass in jeder beliebigen Determinante der komplementäre Minor zu a_{rs} dieselbe Lage einnimmt, wie andernfalls der zu dem Elemente a_{sr} gehörige Minor, wenn man nur erst an der gegebenen Determinante die Vertauschung der Zeilen und Spalten vorgenommen hat, so ergiebt sich:

In einer symmetrischen Determinante sind die komplementären Minoren zu zwei konjugierten Elementen gleich.

Und daraus folgt:

Die zu einer symmetrischen Determinante reziproke ist wieder eine symmetrische Determinante.

Dem Vorangehenden entsprechend können wir behaupten:

Die diagonalen Minoren einer schiefen Determinante sind ihrerseits auch schiefe Determinanten.

Wenn man in einer schiefsymmetrischen Determinante die Zeilen und Spalten vertauscht, so sieht man, weil ja im Allgemeinen das Element a_{rs} mit a_{sr} die Stelle wechselt und weil $a_{rs} = - a_{sr}$ und $a_{rr} = 0$, dass jedes Element mit (-1) multipliziert erscheint. Multipliziert man nun in einer Determinante n-ter Ordnung alle Elemente mit (-1), so erhält dadurch die Determinante selbst den Faktor $(-1)^n$. Hieraus ergiebt sich, falls n ungerade, dass die Determinante nach dem Wechsel von Zeilen und Spalten mit verwandeltem Vorzeichen erscheint und mithin nur Null sein kann. Wir sagen also:

Eine halbsymmetrische Determinante von ungerader Ordnung ist Null.

Dem entsprechend wollen wir den komplementären Minor eines Elementes a_{rs} betrachten. Wechseln wir bei allen Elementen die Zeichen, so erhalten wir den komplementären Minor des konjugierten Elementes a_{sr}, weil ja Zeichenwechsel bei allen Elementen dem Vertauschen der Zeilen mit den Spalten entspricht. Daher können wir aussprechen: Der komplementäre Minor von a_{sr} ist gleich dem mit $(-1)^{n-1}$ multiplizierten komplementären Minor von a_{rs}. Also:

In einer halbsymmetrischen Determinante der Ordnung n sind die komplementären Minoren zweier konjugierten Elemente dem absoluten Werthe nach gleich; sie sind aber mit dem nämlichen oder dem entgegengesetzten Zeichen versehen, jenachdem n ungerade oder gerade ist.

Hieraus folgt auch:

Die zu einer halbsymmetrischen Determinante reziproke ist selbst symmetrisch oder aber halbsymmetrisch, jenachdem für jene die Ordnung eine ungerade oder gerade Zahl ist.

Da wir wissen, dass für eine Determinante mit dem Werthe Null die komplementären Minoren der Elemente einer Reihe proportional sind denjenigen der entsprechenden Elemente einer parallelen Reihe (Siehe S. 20), so können wir mit Anwendung des letzten Lehrsatzes behaupten:

Wenn für eine halbsymmetrische Determinante ungerader Ordnung mit A_{rs} die komplementären Minoren der verschiedenen Elemente bezeichnet werden, so folgt die Beziehung:

$$A_{rr} A_{ss} = A^2_{rs}$$

Wir gehen nun dazu über, diese weitere Eigenthümlichkeit klar zu legen:

Jede halbsymmetrische Determinante von gerader Ordnung stellt sich dar als ein vollständiges Quadrat einer ganzen rationalen Funktion ihrer Elemente.

Für eine halbsymmetrische Determinante zweiter Ordnung, also:

$$\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} = a^2$$

ist dies einleuchtend.

Wir werden zeigen, dass, wenn gedachte Behauptung sich für die Ordnung $(n - 2)$ bewährt, sie auch für die Ordnung n richtig ist.

Wir bezeichnen nun wieder mit A_{rs} den komplementären Minor zu a_{rs} in einer vorgelegten Determinante gerader Ordnung n.

Dann ist A_{11} eine halbsymmetrische Determinante ungerader Ordnung, mithin gleich Null.

In ihr wollen wir mit α_{rs} das algebraische Komplement des Elementes a_{rs} bezeichnen; es wird dann:

$$\begin{array}{l} a_{22}\alpha_{22} + a_{23}\alpha_{23} + \cdots + a_{2n}\alpha_{2n} = A_{11} = 0 \\ a_{32}\alpha_{22} + a_{33}\alpha_{23} + \cdots + a_{3n}\alpha_{2n} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

Wenn wir in der gegebenen Determinante die Elemente der zweiten Spalte mit α_{22} multiplizieren und fügen zu ihnen der Reihe nach die der dritten Spalte hinzu nach Multiplikation mit α_{23}, die der vierten desgleichen, mit dem Faktor α_{24} versehen, ..., so ergiebt

sich dann nach den vorausgehenden Gleichungen für die Elemente der zweiten Spalte mit einziger Ausnahme des ersten Elementes der Werth Null. Man erhält also, wenn R die gegebene Determinante bezeichnet

$$\alpha_{22} R = -(a_{12}\alpha_{22} + \cdots + a_{1n}\alpha_{2n}) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Entwickelt man nun die Determinante nach den Elementen ihrer ersten Spalte, so wird

$$\alpha_{22} R = (a_{12}\alpha_{22} + \cdots + a_{1n}\alpha_{2n})^2$$

da nach der Voraussetzung $a_{21} = -a_{12}, \cdots, a_{n1} = -a_{1n}$, und da überdies die Gleichungen bestehen:

$$\alpha_{23} = \alpha_{32}, \cdots, \alpha_{2n} = \alpha_{n2}$$

nämlich zwischen Minoren der halbsymmetrischen Determinante ungerader Ordnung A_{11}.

Nach dem oben bewiesenen Lehrsatze (Siehe S. 57) wird nun

$$\alpha_{23} = \sqrt{\alpha_{22}}\sqrt{\alpha_{33}}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\alpha_{2n} = \sqrt{\alpha_{22}}\sqrt{\alpha_{nn}}$$

und daraus:

$$R = (a_{12}\sqrt{\alpha_{22}} + a_{13}\sqrt{\alpha_{33}} + \cdots + a_{1n}\sqrt{\alpha_{nn}})^2$$

Nach unserer Voraussetzung, der zu beweisende Lehrsatz sei bis zu den Determinanten der Ordnung $(n-2)$ als richtig erkannt, und in Folge der Bemerkung, dass die $\alpha_{22} \ldots \alpha_{nn}$ gerade halbsymmetrische Determinanten $(n-2)$-ter Ordnung sind, erhellt, dass die in unserer Formel erscheinenden Wurzelgrössen rationale Ausdrücke sind und daher ist R als das Quadrat eines rationalen Ausdrucks dargestellt. Man hat in obiger Formel die Wurzeln mit solchen Vorzeichen zu versehen, dass das Produkt zweier unter ihnen, zum Beispiel $\sqrt{\alpha_{ii}}\sqrt{\alpha_{jj}}$ genau $+\alpha_{ij}$ ergiebt. Mithin wird, nachdem über das Zeichen einer der Wurzelgrössen Bestimmung getroffen ist, das Zeichen einer beliebigen andern auch bestimmt sein.

Wir wollen jetzt eine halbsymmetrische Determinante von gerader Ordnung betrachten, die auch mit Bezug auf die zweite Diagonale symmetrisch ist.

Damit ist angezeigt, dass wir neben den Voraussetzungen:

$$a_{ii} = 0 \qquad a_{rs} = - a_{sr}$$

noch die Annahme zu machen haben:

$$a_{ij} = a_{n-j+1,\, n-i+1}$$

Eine bestimmtere Anschauung zu gewinnen, betrachten wir diese Determinante 4-ter Ordnung:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & b \\ -b & -d & 0 & a \\ -c & -b & -a & 0 \end{vmatrix}$$

Zur ersten Spalte fügen wir die letzte hinzu und danach zur ersten Zeile die letzte Zeile, so erscheint:

$$\begin{vmatrix} 0 & a-b & b-a & c \\ b-a & 0 & d & b \\ a-b & -d & 0 & a \\ -c & -b & -a & 0 \end{vmatrix}.$$

Nun addieren wir zur zweiten Spalte die dritte und darauf zur zweiten Zeile die dritte Zeile. Es ergiebt sich:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & b-a & c \\ 0 & 0 & d & b+a \\ a-b & -d & 0 & a \\ -c & -b-a & -a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c \\ d & b+a \end{vmatrix}^2$$

Dasselbe Verfahren würden wir bei beliebiger Ordnungszahl $n = 2m$ der vorgelegten Determinante anwenden können; wir können daher urtheilen:

Wenn eine halbsymmetrische Determinante gerader Ordnung überdies mit Bezug auf ihre zweite Diagonale symmetrisch ist, so lässt sie sich als das Quadrat einer Determinante ausdrücken, deren Ordnungszahl die Hälfte beträgt.

(Siehe Günther, Det. 1877. S. 91 f.)

§ 17. Pfaffsche Funktionen.

Der Ausdruck, dessen Quadrat sich als halbsymmetrische Determinante gerader Ordnung herausgestellt hat (Siehe S. 57 f.), tritt hier (nach Cayleys Bezeichnung: Pfaffian) unter dem Namen „Pfaffsche Funktion" auf, weil er nämlich bei der Lösung des Pfaffschen Problems eine Rolle spielt.

Scheibner hingegen hat diesem Ausdruck noch den Namen Halbdeterminante gegeben.

Von der Literatur über den Gegenstand kann man einsehen:

Jacobi, Über die Pfaffsche Methode, eine gewöhnliche lineäre Differentialgleichung zwischen $2n$ Variabeln durch ein System von n Gleichungen zu integriren. Journ. f. Math. Bd. 2 (1827) [347—357] S. 354, wieder abgedruckt in Jacobi, Gesammelte Werke, Bd. 4. Berlin. 1886 [19—29].

Jacobi, Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi, caput tertium: Theoria multiplicatoris systematis aequationum differentialium ad varia exempla applicata. Journ. f. Math. Bd. 29 (1845) [213—279] S. 236, wieder abgedruckt in Jacobi, Ges. W., Bd. 4. Berlin 1886 [395—465].

Cayley, Sur quelques propriétés des déterminants gauches. Journ. f. Math. Bd. 32 (1846) [119—123], wieder abgedruckt in Cayley, The collected mathematical papers. vol. 1. Cambridge 1889 [332—336].

Cayley, Journ. f. Math. Bd. 38 S. 95 (der oben S. 47 schon angeführte Aufsatz).

Cayley, Recherches ultérieures sur les déterminants gauches. (Suite du mémoire t. 32 p. 119 et t. 38 p. 93.) Journ. f. Math. Bd 50 (1855) [299—313], wieder abgedruckt in Cayley, Coll. math. pap. vol. 2. Cambr. 1889 [202—215].

Scheibner, Über Halbdeterminanten. Ges. d. Wiss. Leipzig, Ber. Bd. 11 (1859) [151—159].

Grassmanns Untersuchungen über das Pfaffsche Problem (in der Ausdehnungslehre von 1862) und deren eingehende Würdigung durch Engel lese man in Grassmanns gesammelte math. und phys. Werke, Bd. 1. Th. 2. Leipzig 1896. S. 341 ff. und S. 471 ff.

Veltmann, Beiträge zur Theorie der Determinanten. Zeitschr. f. Math. 16. Jahrg. (1871) [516—525].

Schering, a. a. O. Ges. d. Wiss. Göttingen, Abh. Bd. 22. 1877.

Man sehe auch nach in den Lehrbüchern:

Trudi, Teoria dei determinanti. Napoli 1862.

Baltzer, Det. 1881. S. 45. 46. 47.

Günther, Det. 1877. S. 90. 91.

Nach Jacobi bezeichnen wir mit dem Symbol

$$(1, 2, \ldots n)$$

die Pfaffsche Funktion n-ter Ordnung. Und wir werden mit diesem Symbol gerade diejenige der beiden Quadratwurzeln der halbsymmetrischen Determinante meinen, welche das Glied $a_{12}\, a_{34} \ldots a_{n-1,\,n}$ mit dem positiven Vorzeichen enthält.

Man findet dann leicht eine Rekursionsformel, die die Entwicklung der Pfaffschen Funktion n-ter Ordnung mit Hilfe derer von niederer Ordnung angiebt.

Um dies zu leisten, müssen wir auf die Formel zurückgehen, die von uns letzthin für die Entwicklung einer halbsymmetrischen Determinante R gefunden war. Mit ihrer Benutzung erfährt die Pfaffsche Funktion die Darstellung:

$$a_{12}\sqrt{\alpha_{22}} + a_{13}\sqrt{\alpha_{33}} + \cdots$$

und hier sind α_{22}, α_{33} ... die algebraischen Komplemente der Hauptelemente jener Determinante, die man aus der gegebenen Determinante R durch Tilgung der ersten Zeile und ersten Spalte (Komplement von a_{11}) erhält. Überdies muss dem ersten Wurzelausdruck $\sqrt{\alpha_{22}}$ sein Vorzeichen in dem Sinne ertheilt werden, dass $a_{34} \ldots a_{n-1,n}$ ein Glied, das jenem angehört, mit positivem Zeichen erscheint, endlich sind den andern Wurzelgrössen ihre Zeichen dergestalt zuzuweisen, dass

$$\sqrt{\alpha_{ii}}\sqrt{\alpha_{22}} = + \alpha_{2i}$$

wird, wobei α_{2i} das algebraische Komplement von a_{2i} darstellt innerhalb des Komplementes R_{11} von a_{11} in R.

Es ist α_{22} die halbsymmetrische Determinante der Ordnung $(n-2)$, die aus der gegebenen nach Tilgung der beiden ersten Zeilen und Spalten hervorgeht, mithin ist $\sqrt{\alpha_{22}}$ nichts andres, als die Pfaffsche Funktion der Elemente $3, 4, \ldots n$, die wir mit $(3, 4, \ldots n)$ bezeichnen wollen, indem wir der Wurzelgrösse das Zeichen $+$ zuertheilen.

Es lässt sich erweisen, dass bei Annahme des positiven Zeichens für sämmtliche Wurzelausdrücke das Produkt $\sqrt{\alpha_{ii}}\sqrt{\alpha_{jj}}$ genau nach Werth und Zeichen das Komplement von a_{ij} in R_{11} ergiebt. Um also in dem Produkte nicht das Komplement, wohl aber das algebraische Komplement zu erhalten, hat man mit $(-1)^{i+j}$ zu multiplizieren. Somit können wir schliessen, dass im Allgemeinen (wenn dem Wurzelausdruck $\sqrt{\alpha_{22}}$ das Zeichen $+$ beigelegt worden) erforderlich wird, $\sqrt{\alpha_{ii}}$ mit dem Zeichen von $(-1)^i$ zu versehen.

Ein jeder der Wurzelausdrücke $\sqrt{\alpha_{ii}}$ ist eine Pfaffsche Funktion der Ordnung $(n-2)$. Man erhält also gemäss der Bezeichnungsweise Jacobis:

$$\sqrt{\alpha_{ii}} = (-1)^i\,(2, 3, \ldots i-1, i+1, \ldots n)$$

oder auch, wenn man die Elemente $2, 3, \ldots i-1$ nach dem Ende hin schafft, ergiebt sich genau:

$$\sqrt{\alpha_{ii}} = (i+1, \ldots n, 2, 3, \ldots i-1)$$

Es geht danach sogleich die folgende Rekursionsformel hervor:

$$\begin{aligned}(1, 2, \cdots n) = & (1, 2)\,(3, 4, \cdots n) + \\ & + (1, 3)\,(4, 5, \cdots n, 2) + \\ & + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & + (1, n)\,(2, 3, \cdots n - 1)\end{aligned}$$

Die Ausdrücke (1, 2), (1, 3), ... sind eben gerade die Elemente a_{12}, a_{13}, ..., also die Pfaffschen Funktionen zweiter Ordnung.

Wenden wir diese Formel auf die Pfaffschen Funktionen $(n - 2)$-ter Ordnung fortgesetzt wieder an, so erscheint $(1, 2, \ldots n)$ vermittelst der Pfaffschen Funktionen $(n - 4)$-ter Ordnung dargestellt und so weiter. Man gewinnt hierdurch ein Mittel für die Entwicklung einer Pfaffschen Funktion.

So wird zur Pfaffschen Funktion vierter Ordnung (1, 2, 3, 4) die Entwicklung gehören:

$$\begin{aligned}(1, 2, 3, 4) = & (1, 2)\,(3, 4) + (1, 3)\,(4, 2) + (1, 4)\,(2, 3) = \\ = & a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23}\end{aligned}$$

Wenn c_{n-2} die Anzahl der Glieder einer Pfaffschen Funktion von der Ordnung $(n - 2)$ bezeichnet, so wird die Gliederzahl einer solchen von der n-ten Ordnung

$$c_n = (n - 1)\, c_{n-2}$$

sein, daher allgemein:

$$c_n = (n - 1)\,(n - 3)\,(n - 5)\,\ldots\,3 \,.\, 1$$

Demzufolge erscheint die Gliederzahl einer Pfaffschen Funktion durch Rechnung ermittelt.

Es ist ohne Weiteres klar, dass das Zeichen einer Pfaffschen Funktion wechselt, wenn man zwei Indices mit einander vertauscht. So wird zum Beispiel

$$(1, 2, 3, \ldots n) = -(2, 1, 3, \ldots n)$$

Denn, während doch im Ausdruck linker Hand das Glied

$$+ a_{12}\, a_{34} \,\ldots\, a_{n-1, n}$$

erscheint, wird auf der andern Seite der Gleichung das Glied

$$- a_{21}\, a_{34} \,\ldots\, a_{n-1, n}$$

vorkommen, und da $a_{21} = - a_{12}$, so stimmt dieses mit jenem überein.

Folgende Eigenschaft ist bemerkenswerth:

Jeder nicht diagonale Minor der Ordnung $(n-1)$ in der vorgelegten halbsymmetrischen Determinante ist gleich dem Produkt der Pfaffschen Funktion $(1, 2, \ldots n)$, multipliziert in eine andere Pfaffsche Funktion $(n-2)$-ter Ordnung, die aus jener hervorgeht, wenn man zwei ihrer Indices tilgt.

Betrachten wir nämlich Beispiels halber das Komplement von a_{12}, also:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & 0 & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n3} & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

so sind die algebraischen Komplemente der Elemente erster Spalte genau die vorher mit α_{ij} verzeichneten Grössen.

Entwickeln wir diese Determinante, so erhalten wir also:

$$a_{21}\alpha_{22} + a_{31}\alpha_{32} + \cdots + a_{n1}\alpha_{n2}$$

das heisst, zufolge den bereits gefundenen Beziehungen

$$\sqrt{\alpha_{22}}\,(a_{21}\sqrt{\alpha_{22}} + a_{31}\sqrt{\alpha_{33}} + \cdots + a_{n1}\sqrt{\alpha_{nn}})$$

Nun ist aber:

$$\sqrt{\alpha_{ii}} = (i+1, \cdots n, 2, 3, \cdots i-1)$$

daher ergiebt sich für gedachten Minor die Darstellung:

$$\begin{aligned}(3, 4, \cdots n)\,[(2, 1)\,(3, 4, \cdots n) + (3, 1)\,(4, 5, \cdots n, 2) &+ \\ + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \\ + (n, 1)\,(2, 3, \cdots n-1)]&\end{aligned}$$

oder

$$-(3, 4, \cdots n)\,(1, 2, 3, \cdots n)$$

Hierdurch ist der Nachweis für obigen Lehrsatz erbracht. Wenn wir durch A_{ij} das Komplement von a_{ij} in R bezeichnen, so erhalten wir in der That dem Werth und Vorzeichen nach diese Formel:

$$A_{ij} = -(1, 2, \cdots n)\,(1, 2, \cdots i-1, i+1, \cdots j-1, j+1, \cdots n)$$

Das Zeichen dieses Ausdrucks erkennt man auf folgende Weise. In A_{ij} ist der Koeffizient von a_{ji} das Quadrat der Pfaffschen Funktion, die aus $(1, 2, \cdots n)$ nach Tilgung der Indices i, j entsteht und zwar mit dem Zeichen von $(-1)^{i+j-1}$ versehen. Wollen wir rechts den Koeffizienten von a_{ji}, das heisst den von $-a_{ij}$ aufsuchen, so entwickeln wir $(1, 2, \cdots n)$ mittelst der bekannten Rekursionsformel, nach-

dem wir Sorge dafür getragen, die Indices i, j an den Anfang hin zu versetzen. Nun ist doch:

$$(1, 2, \cdots n) = (-1)^{i+j-3} (i, j, 1, 2, \cdots i-1, i+1, \cdots j-1, j+1, \cdots n)$$

Daher wird auf der rechten Seite der Koeffizient von $-a_{ij}$ oder von $-(i, j)$ genau

$$(-1)^{i+j-3} (1, 2, \cdots i-1, i+1, \cdots j-1, j+1, \cdots n)^2$$

also derselbe, wie auf der linken Seite der Gleichung.

§ 18. Lehrsätze über symmetrische und über schiefe Determinanten.

Wir wollen jetzt für die symmetrischen Determinanten eine Eigenschaft nachweisen, die wegen ihrer Anwendungen auf Geometrie und Mechanik bemerkenswerth ist, eine Eigenschaft, die zwar schon seit den Zeiten Cauchys bekannt ist, aber von Sylvester zuerst in einer leicht fasslichen Weise nachgewiesen wurde.

Sylvester, A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares. Phil. Mag. ser. 4. vol. 4. 1852 [138—142].

Man vergleiche den weiter unten (§ 49) angeführten Aufsatz von Siacci, Acc. Tor. vol. 7. S. 782 sowie den geschichtlichen Überblick über die hier berührten Fragen bei Baltzer, Det. 1881. S. 212 f. und Bemerkungen bei Günther, Det. 1877. S. 152 f.

Wir betrachten die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x, & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x, & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

und setzen dabei voraus, dass $a_{rs} = a_{sr}$. Wir wollen diese Determinante mit $f(-x)$ bezeichnen und das Produkt $f(x) \cdot f(-x)$ bilden. Wenn wir uns nun gegenwärtig halten, dass die Determinante der a eine symmetrische ist, so gewinnen wir durch Multiplikation:

$$f(x) \cdot f(-x) = \begin{vmatrix} c_{11}-x^2, & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-x^2, & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}-x^2 \end{vmatrix}$$

Es ist dabei die Bezeichnung gewählt:

$$c_{rr} = \sum_j a^2_{rj}$$

$$c_{rs} = \sum_j a_{rj} a_{sj}$$

Wir denken uns diese Determinante in eine Reihe nach steigenden Potenzen von $(-x^2)$ entwickelt. Das Glied ohne x^2 wird dann augenscheinlich durch die nämliche Determinante dargestellt, in der nur $x^2 = 0$ zu setzen ist, oder auch durch das Quadrat der gegebenen Determinante für den Fall, dass in ihr x den Werth Null erhält Nennen wir C die Determinante der c, wenn darin $x^2 = 0$, und A die Determinante der a, wobei wiederum $x = 0$ vorausgesetzt ist, so wird $C = A^2$ sein. Um zu erkennen, welcher Art die andern Koeffizienten der Entwicklung sein werden, stellen wir uns vor, einem jeden Elemente, das nicht ein Hauptelement ist, werde eine Null hinzugefügt, so dass die ganze Determinante die Gestalt einer solchen mit binomischen Elementen annimmt. Nun mag die Zerlegung in die betreffende Anzahl anderer Determinanten mit einfachen Elementen ausgeführt werden. Es wird dann (wie in § 11 dargestellt ist) der Koeffizient von $(-x^2)$ durch die Summe aller Hauptminoren gebildet von der Ordnung $(n-1)$ innerhalb der Determinante C; dem entsprechend wird der Koeffizient von $(-x^2)^2$ die Summe aller Hauptminoren $(n-2)$-ter Ordnung von C und so fort. Bekannt ist aber aus allgemein gültigen Betrachtungen (Siehe § 15), dass die Summe der Hauptminoren ν-ter Ordnung in C, dem Produkte zweier anderen Determinanten, einem Aggregate gleich kommt, dessen Glieder nacheinander je einen Minor ν-ter Ordnung des einen Faktors jenes Determinantenproduktes durch Multiplikation verbunden zeigen mit dem Minor gleicher Lage aus dem zweiten Faktor, bei Ausdehnung dieses Verfahrens auf alle vorhandenen Minoren der ν-ten Ordnung. Weil nun hier im Besondern C das Quadrat der Determinante der a ist, so findet sich: Für die Determinante C ist die Summe der Hauptminoren von der Ordnung ν gleich der Summe der Quadrate aller Minoren ν-ter Ordnung in A.

Es ergiebt sich demnach, dass alle Koeffizienten der Entwicklung nach Potenzen von $(-x^2)$ der Determinante $f(x) \cdot f(-x)$ Summen von Quadraten sind von Ausdrücken, die sich aus den a zusammensetzen. Nehmen wir die a als reelle Zahlen an, so wissen wir hierdurch, dass alle so gestalteten Koeffizienten wesentlich positive Zahlen sind.

Die Gleichung

$$f(x) \cdot f(-x) = 0$$

kann dann nicht durch ein rein imaginäres x, also ein x von der Form

$q\sqrt{-1}$ befriedigt werden, weil, wenn $-x^2 = q^2$, man bei Einführung dieses Werthes in die Gleichung eine Summe von wesentlich positiven Zahlen erhalten würde, die also nicht Null sein kann. Hierdurch wird ersichtlich, dass weder $f(x) = 0$ noch $f(-x) = 0$ durch einen Werth $x = q\sqrt{-1}$ befriedigt werden. Dem entsprechend kann auch ein x von komplexer Form

$$p + q\sqrt{-1}$$

diesen Gleichungen nicht genügen, weil dann, wenn man beispielsweise setzt:

$$a_{11} - p = a'_{11}$$
$$a_{22} - p = a'_{22}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

die Determinante

$$\begin{vmatrix} a'_{11} - x, & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nn} - x \end{vmatrix}$$

wiederum für $x = q\sqrt{-1}$ Null werden müsste. Dies ist aber, wie wir gesehn, unmöglich.

Also kann x nur reell sein, mit andern Worten:

Wenn man die symmetrische Determinante von obiger Gestalt nach Potenzen von x entwickelt, so hat die Gleichung, die das Verschwinden dieses Polynoms in x aussagt, nur reelle Wurzeln.

Auf diesen Gegenstand beziehen sich die beiden Arbeiten Sylvesters:

Sylvester, Preuve instantanée d'après la méthode de Fourier, de la réalité des racines de l'équation séculaire. Journ. f. Math. Bd. 88 (1880) S. 4. 5.

Sylvester, Sur un déterminant symétrique qui comprend comme cas particulier la première partie de l'équation séculaire. Journ. f. Math. Bd. 88 (1880) [6—9].

Wir wollen nun einen Lehrsatz mittheilen über schiefe Determinanten, deren Hauptelemente gleich 1 sind. Es lässt sich nämlich zeigen:

Jede schiefe Determinante, deren Hauptelemente gleich 1 sind, besteht aus einer Summe von Quadraten.

Setzen wir an Stelle der Hauptelemente Nullen, so erhalten wir eine halbsymmetrische Determinante, die bekanntermassen entweder

verschwindet oder ein vollständiges Quadrat darstellt. Setzen wir im Gegentheil Werthe x ein, so entsteht eine andere und zwar schiefe Determinante, die sich auffassen lässt als entstanden aus der halbsymmetrischen Determinante durch Hinzufügung von x zu ihren Hauptelementen. Für den Fall $x = 1$ hat man dann die vorgelegte Determinante. Man kann dann eine ähnliche Entwicklung, wie im Vorangehenden, vornehmen und das dabei entstehende Polynom nach den aufsteigenden Potenzen von x ordnen.

Wie oben wird ersichtlich, dass die Koeffizienten der Potenzen von x sich als Summen der Hauptminoren einer gewissen Ordnung aus der halbsymmetrischen Determinante darstellen.

Da nun solche Hauptminoren doch ihrerseits wiederum halbsymmetrische Determinanten sind, so ergiebt sich, dass die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von x innerhalb der gedachten Entwicklung Summen von Quadraten sind. Für $x = 1$ schränkt sich die ganze Entwicklung auf eine Summe von Quadraten ein.

§ 19. Die Determinanten Hankels und mit ihnen verwandte.

Wir kommen zur Untersuchung einiger besonderen Klassen von symmetrischen Determinanten.

Die von Hankel behandelte Determinante wird mit Hilfe von $(2n - 1)$ gegebenen Elementen in folgender Weise gebildet:

$$P = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & a_{2n-2} \end{vmatrix}$$

Eine solche Determinante wurde von Hankel orthosymmetrisch genannt, von Sylvester persymmetrisch; Frobenius Bezeichnung zufolge dürfte sie die rekurrierende Determinante heissen.

Hankel, Über eine besondere Klasse der symmetrischen Determinanten. (Inaug. Diss. Leipzig.) Göttingen 1861. Vgl. auch Baltzer, Det. 1881. S. 26 f. und Netto in Encycl. d. math. Wiss., I A 2. Kombinatorik, Art. 27.

Es ist dieser Determinante eigenthümlich, dass man sie durch eine andere, gleichartige ausdrücken kann, deren Elemente den Differenzen-Reihen der auf einander folgenden Grössen $a_0 \ldots a_{2n-2}$ entlehnt sind und zwar jene Reihen eröffnen.

Setzen wir nämlich, ähnlich wie oben S. 40

$$
\begin{array}{llll}
\Delta_1^{(1)} = a_1 - a_0 & & & \\
\Delta_2^{(1)} = a_2 - a_1 & \Delta_2^{(2)} = \Delta_2^{(1)} - \Delta_1^{(1)} & & \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & & \\
\Delta_n^{(1)} = a_n - a_{n-1} & \Delta_n^{(2)} = \Delta_n^{(1)} - \Delta_{n-1}^{(1)} & \cdots & \Delta_n^{(n)} = \Delta_n^{(n-1)} - \Delta_{n-1}^{(n-1)} \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdots & \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{array}
$$

und ziehen von den Elementen der letzten Spalte die der vorletzten ab, von denen der vorletzten die der drittletzten und so des weiteren. Dann erhalten wir:

$$
\begin{vmatrix}
a_0 & \Delta_1^{(1)} & \Delta_2^{(1)} & \cdots & \Delta_{n-1}^{(1)} \\
a_1 & \Delta_2^{(1)} & \Delta_3^{(1)} & \cdots & \Delta_n^{(1)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
a_{n-1} & \Delta_n^{(1)} & \Delta_{n+1}^{(1)} & \cdots & \Delta_{2n-2}^{(1)}
\end{vmatrix}
$$

Behandeln wir jetzt diese letztere Determinante mit Anwendung desselben Verfahrens, beginnend mit der 3-ten Spalte, dann wiederum in gleicher Weise die so gewonnene Determinante von der 4-ten Spalte aus und so weiter, so erhalten wir:

$$
\begin{vmatrix}
a_0 & \Delta_1^{(1)} & \Delta_2^{(2)} & \cdots & \Delta_{n-1}^{(n-1)} \\
a_1 & \Delta_2^{(1)} & \Delta_3^{(2)} & \cdots & \Delta_n^{(n-1)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
a_{n-1} & \Delta_n^{(1)} & \Delta_{n+1}^{(2)} & \cdots & \Delta_{2n-2}^{(n-1)}
\end{vmatrix}
$$

Wenn wir nun zum Schluss von der zweiten Zeile die erste abziehen, ebenso von der 3-ten Zeile die 2-te und so fort, so ergiebt sich:

$$
\begin{vmatrix}
a_0 & \Delta_1^{(1)} & \Delta_2^{(2)} & \cdots & \Delta_{n-1}^{(n-1)} \\
\Delta_1^{(1)} & \Delta_2^{(2)} & \Delta_3^{(3)} & \cdots & \Delta_n^{(n)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\Delta_{n-1}^{(n-1)} & \Delta_n^{(n)} & \Delta_{n+1}^{(n+1)} & \cdots & \Delta_{2n-2}^{(2n-2)}
\end{vmatrix}
$$

eine Determinante, die aus allen den Differenzen Δ, welche gleiche obere und untere Indices haben, gebildet ist.

Es ist bemerkenswerth, dass thatsächlich diese Determinante mit Bezug auf die Grössen $\Delta_k^{(k)}$ in derselben Weise zusammengesetzt ist, wie unsere vorgelegte Determinante bezüglich der Grössen a. Der Übereinstimmung in der Schreibung wegen kann man die Grösse a_0 mit $\Delta_0^{(0)}$ bezeichnen.

Im besonderen Falle, bei der Annahme, dass die Elemente $a_0 \ldots a_{2n-2}$ eine arithmetische Reihe $(n-1)$-ter Ordnung darstellen, oder also ihre Differenzen der $(n-1)$-ten Ordnung unter einander gleich sind, mithin die Differenzen höherer Ordnung als $(n-1)$ verschwinden, erhellt, dass alle Elemente, die unterhalb der zweiten Diagonale stehen, also alle $\Delta_k^{(k)}$, bei denen $k > (n-1)$, Null werden; in Folge dessen wird die vorausgehende Determinante auf das Produkt der Elemente der zweiten Diagonale eingeschränkt und zwar mit dem Zeichen, welches der Potenz

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

entspricht. Mit andern Worten, es ergiebt sich unter diesen Umständen für die Hankelsche Determinante der Werth

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\left[\Delta_{n-1}^{(n-1)}\right]^n$$

Wenn dagegen die gegebenen Elemente eine arithmetische Reihe von niederer Ordnung als $(n-1)$ bilden, dann wird die Determinante gleich Null.

Und weiter ist die Hankelsche Determinante auch gleich Null, wenn ihre Elemente eine geometrische Reihe darstellen, da ja dann die Elemente der zweiten Zeile gleiche Vielfache derer in der ersten Zeile sind.

Siehe Günther, Det. 1877. S. 80.

Wird a_0 als eine Funktion von x gedacht und sind $a_1 \ldots a_{n-1} \ldots$ ihre auf einander folgenden Ableitungen nach dieser unabhängigen Veränderlichen, so nimmt unsere Hankelsche Determinante, wie oben (Siehe S. 50) schon erwähnt worden, die Gestalt der Wronskischen Determinante an.

Eine Determinante, in deren Aufbau sich eine gewisse Verwandtschaft mit denen Hankels zeigt, ist die folgende:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n & x \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n+1} & \ldots & a_{2n-1} & x^n \end{vmatrix} = D_n$$

Für dieses D_n lässt sich eine bemerkenswerthe Rekursionsformel auffinden, die seine Berechnung von den entsprechenden Determinanten der Ordnungen $(n-1)$ und $(n-2)$ abhängig macht. Man lese:

Jacobi, De eliminatione variabilis e duabus aequationibus algebraicis. Journ. f. Math. Bd. 15 (1836) [101—124]. Wieder abgedruckt in Jacobi, Ges. Werke. Bd. 3. Berlin 1884 [297—320] S. 315 ff.

Frobenius, Über das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen (Fortsetzung und Schluss). Math. Mitth. Sitzber. Berlin 1894 [135—159] in § 10. S. 142—146 = Akad. Berlin. Ber. (1894) [407—431] in § 10 S. 414—418.

Netto, Zur Theorie der Resultanten. Journ. f. Math. Bd. 116 (1896) [33—49] S. 44.

Der Minor, welcher das Komplement zum Elemente x^n darstellt, ist eine Hankelsche Determinante, die wir H_n nennen werden.

$$H_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{2n-2} \end{vmatrix}$$

Wir werden dann mit H_n' das Komplement des Elementes x^{n-1} bezeichnen, also die Determinante, welche man aus der letztbenannten erhält, wenn man ihre Endzeile mit den Elementen $a_n\ a_{n+1} \dots a_{2n-1}$ besetzt:

$$H_n' = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \dots & a_{2n-3} \\ a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-1} \end{vmatrix}$$

Die Rekursionsformel, von der wir sprachen, ist die folgende:

$$H_{n-1}^2 D_n + (H_{n-1} H_n' - H_n H_{n-1}' - H_{n-1} H_n x) D_{n-1} + H_n^2 D_{n-2} = 0$$

Wenn wir die Grössen a als die Koeffizienten binärer Formen auffassen, so erhalten die Hankelsche Determinante H_n und die Determinante D_n für die Invariantenlehre der Formen eine hervorragende Bedeutung.

Nehmen wir im Besonderen eine binäre Form von ungerader Ordnung $(2n - 1)$

$$f = \sum_i \binom{2n-1}{i} a_i x_1^{2n-i-1} x_2^i$$

Diese Form lässt sich stets als Summe von n Potenzen linearer Formen mit dem Exponenten $(2n - 1)$ schreiben:

$$b_1 (x_1 - \alpha_1 x_2)^{2n-1} + b_2 (x_1 - \alpha_2 x_2)^{2n-1} + \dots + b_n (x_1 - \alpha_n x_2)^{2n-1}$$

und dabei sind die α die Wurzeln der Gleichung $D_n = 0$;

die Determinante D_n heisst dann die Kanonizante der gegebenen Form.

Schreiben wir die letzte Spalte von D_n (in homogener Bezeichnungsweise)

$$\begin{matrix} (-1)^n x_2^n \\ -(-1)^n x_2^{n-1} x_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_1^n \end{matrix}$$

so ist D_n eine Kovariante von f und sie ist auch der Determinante gleichwerthig, die aus den Abgeleiteten der Ordnung $(2n-2)$ von f gebildet ist.

Betrachten wir nun die andere Form gerader Ordnung $(2n-2)$

$$F = \sum_i \binom{2n-2}{i} a_i x_1^{2n-i-2} x_2^i$$

Diese Form ist darstellbar als Summe von $(n-1)$ Potenzen linearer Formen, wenn die Determinante H_n gleich Null ist. Die letztere heisst die Katalektikante der gegebenen Form und ist eine Invariante derselben. Es ist die Determinante aus den Ableitungen von der Ordnung $(2n-2)$ von F.

Wir können uns hier auf Erläuterungen dieser Gegenstände nicht einlassen, weil wir dann auf ein fremdes Gebiet übergehen würden, nämlich auf das Gebiet der Invariantenlehre der algebraischen Formen. Es mag mit dem hier gegebenen Hinweis sein Bewenden haben, wir wollen verweisen auf:

Sylvester, Sketch of a memoir on elimination, transformation and canonical forms. Cambr. Dubl. math. Journ. vol. 6 (1851) [186—200].

Sylvester, On a remarkable discovery in the theory of canonical forms and of hyperdeterminants. Phil. Mag. ser. 4 vol. 2 (1851) [391—410].

Sylvester, On the principles of the calculus of forms. Cambr. Dubl. math. Journ. vol. 7 (1852) part 1, sect. 1—3 [52—97] sect. 4—6 [179—217].

Cayley, Mémoire sur la forme canonique des fonctions binaires. Journ. f. Math. Bd. 54 (1857) [48—58] und Addition au mémoire . . . ebenda S. 292.

Man vergleiche Meyer in Encycl. d. math. Wiss. I B 2. Invariantentheorie, Art. 10.

§ 20. Zyklische Determinanten.

Wir kommen nun zu den sogenannten Zirkulanten oder zyklischen Determinanten. Es sind dies symmetrische Determinanten, aber nur aus n Grössen gebildet. Auf der ersten Zeile ordnen wir

diese n Grössen selbst an, auf die zweite Zeile setzen wir die nämlichen Grössen, nachdem wir sie mit einander zyklisch vertauscht haben, auf die dritte Zeile kommen wieder dieselben Grössen, die auf der zweiten standen, aber auch sie einmal zyklisch vertauscht und so geht es fort.

Eine zyklische Determinante hat also die Gestalt:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \\ a_3 & a_4 & \dots & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Es leuchtet ein, dass dies eine symmetrische Determinante ist, ja sie kann als ein besonderer Fall der Hankelschen, der rekurrierenden Determinante aufgefasst werden. Wir wollen sehen, wie sich der Werth einer beliebigen zyklischen Determinante bestimmen lässt.

Mögen $\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_n$ die n Wurzeln (einschliesslich der Einheit) der binomischen Gleichung sein

$$x^n - 1 = 0$$

Dann multiplizieren wir unsere zyklische Determinante mit:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

und setzen im Allgemeinen:

$$\varphi(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1}$$

Beachten wir, dass

$$\alpha^n = 1$$

und daher:

$$\begin{aligned} a_2 + a_3\alpha + a_4\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^{n-2} + a_1\alpha^{n-1} &= \alpha^{n-1}\varphi(\alpha) \\ a_3 + a_4\alpha + a_5\alpha^2 + \cdots + a_1\alpha^{n-2} + a_2\alpha^{n-1} &= \alpha^{n-2}\varphi(\alpha) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \quad & \cdot \end{aligned}$$

so ergiebt sich nach Ausführung des angedeuteten Produktes (Zeilen mit Zeilen verbunden gedacht):

$$A.D = \begin{vmatrix} \varphi(\alpha_1) & \varphi(\alpha_2) & \cdots & \varphi(\alpha_n) \\ \alpha_1^{n-1}\varphi(\alpha_1), & \alpha_2^{n-1}\varphi(\alpha_2), & \cdots & \alpha_n^{n-1}\varphi(\alpha_n) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_1\varphi(\alpha_1), & \alpha_2\varphi(\alpha_2), & \cdots & \alpha_n\varphi(\alpha_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi(\alpha_1)\cdots\varphi(\alpha_n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$$

und daraus:

$$A = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}\varphi(\alpha_1)\cdots\varphi(\alpha_n)$$

Diese Gleichung ist insofern bemerkenswerth, als sie die Berechnung der zyklischen Determinante von der Kenntniss der n-ten Wurzeln der Einheit abhängig macht.

Man kann sie auch in Worten auslegen:

Eine zyklische Determinante von der Ordnung n spaltet sich in n Faktoren, welche aus ihren Elementen mit Hilfe der n-ten Einheitswurzeln rational zusammengesetzt sind.

Ein Verzeichniss über zyklische Determinanten gelieferter Arbeiten folge hier:

Cremona, Intorno ad un teorema di Abel, Ann. da Tort. t. 7 (1856) [99—105].

Souillart, Note sur une décomposition de carrés. Nouv. ann. de math. t. 19 (1860) [320—322].

Zehfuss, Anwendungen einer besonderen Determinante. Zeitschr. f. Math. 7. Jahrg. (1862) [439—445].

Stern, Einige Bemerkungen über eine Determinante. Journ. f. Math. Bd. 73 (1871) [374—380].

Minozzi, Sopra un determinante. Giorn. di Batt. vol. 16 (1878) [148—151].

Glaisher, On the factors of a special form of determinant. Qu. J. vol. 15 (1878) [347—356]

Glaisher, On a special form of determinant, and on certain fonctions of n variables analogous to the sine and cosine. Qu. J. vol. 16 (1879) [15—33].

Scott, Note on a determinant theorem of Mr. Glaishers. Qu. J. vol. 17 (1881) [129—132].

Muir, On new and recently discovered properties of certain symmetric determinants. Qu. J. vol. 18 (1882) [166—177].

Torelli, Sui determinanti circolanti. Acc. Napoli, Rendic. anno 21 (1882) [83—91].

Solche Determinanten begegnen uns in Fragen der Zahlentheorie und bei geometrischen Untersuchungen.

Kummer, Mémoire sur la théorie des nombres complexes composés des racines de l'unité et de nombres entiers. Journ. de math. (Liouv.) sér. 1. t. 16 (1851) [377—498] S. 381.

Schütz, Untersuchungen über functionale Congruenzen (Inaug. Diss. Göttingen) Frankfurt a. M. 1867.
Diekmann, Einleitung in die Lehre von den Determinanten und ihrer Anwendung. Essen 1876. S. 62 ff.

Bevor wir einige der Lehrsätze über zyklische Determinanten aussprechen, wollen wir bemerken, dass vielfach eine Umwandlungsform unserer zyklischen Determinante als Zirkulante auftritt dergestalt, dass in ihr die Symmetrie der Elemente sich nicht auf die Hauptdiagonale, sondern auf die zweite Diagonale bezieht, und die erste Spalte die Elemente in der Folge $a_1, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2$ aufweist. Diese Zirkulante C kann natürlich nur im Vorzeichen von jener A verschieden sein. Wir werden jetzt noch eine Bezeichnungsweise einführen.

Im Zusammenhange mit der zyklischen betrachten wir diese andere Determinante:

$$A' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 \ldots & -a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 \ldots & -a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \ldots & \cdot \\ a_n & -a_1 & -a_2 \ldots & -a_{n-1} \end{vmatrix}$$

welche man aus der zyklischen durch Einführung des Zeichenwechsels bei allen Elementen, die auf der unteren Seite der Nebendiagonale stehen, ableiten kann. Diese neue Determinante nennen wir eine schiefzyklische, denn es ist dieser Name für die höchstens im Vorzeichen von A' abweichende Determinante gebräuchlich, die auf entsprechende Weise aus der Zirkulante C hervorgeht.

Es gelten nun folgende Lehrsätze:

1. Eine zyklische Determinante von der Ordnung (rm) ist mittelst einer zyklischen m-ter Ordnung ausdrückbar, in der jedes Element eine algebraische Summe ist von m^{r-1} Minoren r-ter Ordnung der gegebenen Determinante. (Torelli.)

Der besondere Fall, der der Annahme $r = 2$ entspricht, bildet einen Lehrsatz von Glaisher.

Glaisher a. a. O. Qu. J. vol. 16 S. 30 f. Man vergleiche den Nachweis dieses Satzes durch Muir a. a. O., Qu. J. vol. 18 S. 167 f.

2. Eine schiefzyklische Determinante von der Ordnung (rm) lässt sich mittelst einer schiefzyklischen m-ter Ordnung ausdrücken, in der jedes Element eine algebraische Summe von m^{r-1} Minoren r-ter Ordnung, enthalten in der gegebenen Determinante.

3. **Eine zyklische Determinante von der Ordnung ($2m$) ist das Produkt einer zyklischen m-ter Ordnung in eine schiefzyklische derselben Ordnung m.** (Scott.)

Der Einfachheit wegen werden wir den Lehrsatz 1. nur für den Fall $r = 2$ beweisen. Der Nachweis kann dann ohne neue Schwierigkeit auf den allgemeinen Fall ausgedehnt werden. (Siehe Torelli a. a. O.)

Wir wissen, dass die zyklische Determinante der Ordnung ($2m$) gleich ist:

$$(-1)^{m-1}\prod_{i=1}^{2m}(a_1 + a_2\alpha_i + \cdots + a_{2m}\alpha_i^{2m-1})$$

wo α_i ($i = 1, 2, \ldots 2m$) eine beliebige Wurzel der binomischen Gleichung

$$x^{2m} = 1$$

Bezeichnen wir mit

$$y_j \quad (j = 1, 2, \ldots m)$$

die Wurzeln der Gleichung

$$x^m = 1$$

so werden die α_i zu zwei und zwei dem absoluten Werthe nach den $\sqrt{y_j}$ gleich sein, jedoch die eine das entgegengesetzte, die andere dasselbe Vorzeichen haben. Daher können wir schreiben:

$$(-1)^{m-1}\prod_{j=1}^{m}(a_1 + a_2\sqrt{y_j} + \cdots + a_{2m}\sqrt{y_j^{2m-1}}) \times$$
$$\times (a_1 - a_2\sqrt{y_j} + \cdots - a_{2m}\sqrt{y_j^{2m-1}})$$

oder:

$$(-1)^{m-1}\prod_{j=1}^{m}[(a_1 + a_3y_j + a_5y_j^2 + \cdots + a_{2m-1}y_j^{m-1})^2 -$$
$$-(a_2 + a_4y_j + a_6y_j^2 + \cdots + a_{2m}y_j^{m-1})^2y_j]$$

Erinnert man sich, dass $y_j^m = 1$, so kann man den in Klammer eingeschlossenen Theil in ein Polynom verwandeln, geordnet nach Potenzen von y_j bis zur ($m - 1$)-ten Potenz. Prüfen wir die verschiedenen Koeffizienten der Entwicklung. Wie sich leicht erkennen lässt, werden diese Koeffizienten Summen von Minoren zweiter Ordnung aus der gegebenen zyklischen Determinante sein.

Wenn zum Beispiel m **ungerade ist**, so wird der erste Koeffizient:

$$a_1^2 + 2a_3a_{2m-1} + 2a_5a_{2m-3} + \cdots + 2a_ma_{m+2} -$$
$$- a^2_{m+1} - 2a_{m-1}a_{m+3} - 2a_{m-3}a_{m+5} - \cdots - 2a_2a_{2m}$$

und wenn m gerade, wird im Gegentheil der erste Koeffizient:

$$a_1^2 + 2a_3a_{2m-1} + 2a_5a_{2m-3} + \cdots + 2a_{m-1}a_{m+3} + a^2_{m+1} -$$
$$- a_m a_{m+2} - 2a_{m-2}a_{m+4} - 2a_{m-4}a_{m+6} - \cdots - 2a_2a_{2m} - a_m a_{m+2}$$

und ein jeder dieser Ausdrücke stellt die algebraische Summe von Minoren zweiter Ordnung dar, die in der gegebenen Determinante enthalten sind.

Eine entsprechende Beobachtung würde man nun mit Bezug auf die andern Koeffizienten machen können.

Wenn man dann diese Koeffizienten mit $p_1 p_2 \ldots p_m$ bezeichnet, so ergiebt sich für die gegebene zyklische Determinante, abgesehen vom Vorzeichen, der Werth:

$$\prod_{j=1}^{m} (p_1 + p_2 y_j + \cdots + p_m y_j^{m-1})$$

oder auch, es wird unsere zyklische Determinante die zyklische m-ter Ordnung, gebildet aus den Elementen p.

In ähnlicher Weise wird man mit der schiefzyklischen verfahren können und dann den Lehrsatz 2. erhalten.

Wir werden nun gradewegs den Lehrsatz 3. erweisen.

Setzen wir eine zyklische Determinante von der Ordnung $(2m)$ voraus:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_m & a_{m+1} & \ldots & a_{2m} \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_{m+1} & a_{m+2} & \ldots & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_m & a_{m+1} & a_{m+2} & \ldots & a_{2m-1} & a_{2m} & \ldots & a_{m-1} \\ a_{m+1} & a_{m+2} & a_{m+3} & \ldots & a_{2m} & a_1 & \ldots & a_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{2m} & a_1 & a_2 & \ldots & a_{m-1} & a_m & \ldots & a_{2m-1} \end{vmatrix}$$

Wir fügen zur $(m+1)$-ten Zeile die erste hinzu, zur $(m+2)$-ten die zweite und so weiter. Danach ziehen wir von der ersten Spalte die $(m+1)$-te ab, von der zweiten die $(m+2)$-te und so fort. Es ist leicht zu bemerken, dass dann alle Elemente, die zugleich in den letzten m Zeilen und den ersten m Spalten enthalten sind, gleich Null werden. Damit verwandelt sich die Determinante der Ordnung $(2m)$ in das Produkt zweier Unterdeterminanten m-ter Ordnung, wovon die eine sich als eine zyklische Determinante darstellt, die andere als schiefzyklische Determinante. Setzen wir nämlich:

$$\begin{array}{lll} a_1 + a_{m+1} = b_1 & \quad & a_1 - a_{m+1} = c_1 \\ a_2 + a_{m+2} = b_2 & & a_2 - a_{m+2} = c_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_m + a_{2m} \;\; = b_m & & a_m - a_{2m} \;\; = c_m \end{array}$$

so erscheint dies Produkt in der Gestalt:

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_m \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & -c_1 \\ c_3 & c_4 & c_5 & \dots & -c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_m & -c_1 & -c_2 & \dots & -c_{m-1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_m \\ b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_1 \\ b_3 & b_4 & b_5 & \dots & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_m & b_1 & b_2 & \dots & b_{m-1} \end{vmatrix}$$

Hiermit ist der Lehrsatz bewiesen.

In der angeführten Arbeit von Torelli ist dieser Lehrsatz auf den Fall der Ordnung (rm) verallgemeinert.

Wir wollen noch andere Betrachtungen über zyklische Determinanten hinzufügen, die dem genannten Aufsatze von Stern entnommen sind.

Wir bezeichnen mit

$$A_1 \; A_2 \cdots A_n$$

die algebraischen Komplemente der Elemente $a_1 a_2 \dots a_n$, die die erste Zeile einer zyklischen Determinante C von der Ordnung n darstellen.

Dann gelten augenscheinlich die Gleichungen:

$$\begin{array}{l} a_1 A_1 + a_2 A_2 + \cdots + a_n A_n \;\; = C \\ a_2 A_1 + a_3 A_2 + \cdots + a_1 A_n \;\; = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n A_1 + a_1 A_2 + \cdots + a_{n-1} A_n = 0 \end{array}$$

und daraus erhält man durch Summation:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = C.$$

Wenn man nun daran denkt, dass C sich als das Produkt sämmtlicher Faktoren nach Art von:

$$a_1 + a_2 \alpha + \cdots + a_n \alpha^{n-1}$$

darstellen lässt, wobei α eine n-te Wurzel der Einheit bedeutet (die Zahl 1 selbst inbegriffen), so leuchtet ein, dass die Minorensumme $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ nichts andres ist, als das Produkt aller Faktoren der eben bezeichneten Form, aber unter Ausschluss des Falles $\alpha = 1$.

Wir können folgenden Lehrsatz beweisen:

Sind $a_1 \dots a_n$ ganze Zahlen von der Beschaffenheit, dass

$$a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$$

so ist der Ausdruck

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

durch n theilbar.

Und wirklich kann man zunächst sofort erkennen, dass das algebraische Komplement A_1 des Elementes a_1, welches in der ersten Zeile erscheint, genau gleich ist demjenigen von a_1, das in der zweiten Zeile steht und so fort, das heisst, die n^2 Minoren der Ordnung $(n-1)$ sind zu je n unter einander gleich.

Danach wird die Abgeleitete von C in Bezug auf ein Element a_r gleich dem mit n multiplizierten algebraischen Komplement von a_r, als Element der ersten Zeile angesehen, also

$$A_r = \frac{1}{n}\frac{\partial C}{\partial a_r}$$

und weil

$$C = a \,.\, A$$

so ergiebt sich

$$\frac{\partial C}{\partial a_r} = A + a\frac{\partial A}{\partial a_r}$$

und daraus

$$n(A_r - A_s) = a\left(\frac{\partial A}{\partial a_r} - \frac{\partial A}{\partial a_s}\right)$$

Ist $a = 0$, dann wird $A_r = A_s$ für jede beliebige Kombination der Indices r und s, also:

$$A_r = \frac{A}{n}$$

und weil A_r augenscheinlich eine ganze Zahl ist, wenn die $a_1 \dots a_n$ ganze Zahlen sind, so erfährt man, dass A durch n theilbar ist.

Beachtung verdient auch diese weitere Bemerkung über zyklische Determinanten.

Das Produkt zweier zyklischen Determinanten derselben Ordnung lässt sich wiederum als zyklische darstellen. (Souillart.)

Zum Beweis dieses Lehrsatzes genügt es, die Gestalt der einen von beiden zyklischen Determinanten abzuändern, nämlich in ihr an zweiter Stelle die letzte Zeile zu setzen, an dritter Stelle die vorletzte und so fort, also die Ordnung der Zeilen von der zweiten beginnend umzukehren.

Dann lauten die beiden zyklischen Determinanten:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & a_1 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix} = A$$

und:

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ b_n & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ . & . & . & \dots & . & . \\ b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_n & b_1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} B.$$

Das zeilenweis gebildete Produkt von A und B wird danach:

$$A \,.\, B = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_2 & c_3 & \dots & c_1 \\ . & . & \dots & . \\ c_n & c_1 & \dots & c_{n-1} \end{vmatrix}$$

wobei:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \\ c_2 &= a_2 b_1 + a_3 b_2 + \cdots + a_1 b_n \\ c_3 &= a_3 b_1 + a_4 b_2 + \cdots + a_2 b_n \\ &. \quad\quad . \quad\quad . \quad \dots \quad . \end{aligned}$$

Das Zeichen wird $+$, wenn n von der Form $(4p + 1)$ oder $(4p + 2)$ ist und wird —, wenn n die Formen $4p, (4p + 3)$ annimmt.

Die mit der zyklischen B vorgenommene Verwandlung kommt damit überein, die auf die erste folgenden Zeilen der Art zu bilden, dass man die Elemente im umgekehrten Sinne vertauscht, dem gegenüber wie sie in A vertauscht worden sind.

§ 21. Determinanten von Puchta und Noether.

Wir schreiten zur Betrachtung von gewissen anderen und zwar besonderen symmetrischen Determinanten, die durch Puchta und Noether untersucht worden sind.

Puchta, Ein Determinantensatz und seine Umkehrung. Akad. Wien, Denkschr. 38. Bd. 2. Abth. (1878) [215—221].

Noether, Zur Theorie der Thetafunktionen von beliebig vielen Argumenten. Math. Ann. Bd. 16 (1880) [270—344]. Siehe § 15 [322—325]: Eine besondere Klasse von Determinanten.

Noether, Notiz über eine Klasse symmetrischer Determinanten. Math Ann. Bd. 16 (1880) [551—555].

Puchta, Ein neuer Satz aus der Theorie der Determinanten. Akad. Wien, Denkschr. 44. Bd. 2. Abth. (1882) [277—282].

Muir, a. a. O. Qu. J. vol. 18 (1882) [166—177] Art. 6—8 S. 169—172.

Solche Determinanten werden in ihrer einfachsten Form folgendermaassen dargestellt.

Es sind Determinanten von der Ordnung 2^μ und ihre Elemente a_{rs} befriedigen überdies für jedes $k \leqq \mu$ und für $r, s \leqq 2^k$ die Gleichungen

$$a_{r+2^{k-1}, s+2^{k-1}} = a_{rs} = a_{sr}$$

wobei die Indices mod. 2^k reduziert werden.

Eine derartige Beziehung zwischen den Elementen bewirkt, dass die Matrix dieser Determinanten sich aus vier quadratischen Matrices

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}$$

zusammensetzt, dergestalt also, dass die, welche sich in diagonaler Richtung entsprechen, gleich sind und dass überdies jede dieser quadratischen Matrices eine Determinante vorstellt, welche ihrerseits an derselben Eigenthümlichkeit Theil hat, die die gesammte Determinante geniesst. Es lässt sich diese Betrachtung fortsetzen.

Die Gestalt einer solchen Determinante ist die folgende:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_4 & a_3 & a_6 & a_5 & a_8 & a_7 & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 & a_7 & a_8 & a_5 & a_6 & \cdots \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & \cdots \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_6 & a_5 & a_8 & a_7 & a_2 & a_1 & a_4 & a_3 & \cdots \\ a_7 & a_8 & a_5 & a_6 & a_3 & a_4 & a_1 & a_2 & \cdots \\ a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{vmatrix}$$

In der zweiten der oben angeführten Arbeiten von **Puchta** und in der zweiten **Noethers** verallgemeinern die Verfasser diese Determinantenform noch und stellen so Determinanten her von der Ordnung $(n_1 n_2 \ldots n_\mu)$, deren Bildung der soeben angezeigten ähnlich ist.

Wir wollen den wichtigen Lehrsatz beweisen:

Die Determinante $\varDelta$ lässt sich als Produkt von 2^μ Faktoren darstellen, die in den Elementen a linear sind.

Wirklich erhält man für eine Determinante zweiter Ordnung

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix} = a_1^2 - a_2^2 = (a_1 - a_2)(a_1 + a_2)$$

Eine Determinante 4-ter Ordnung erfährt, wenn wir zur dritten Zeile die Elemente der ersten Zeile hinzufügen und zur vierten die Elemente der zweiten und danach von den Elementen der ersten Spalte die der dritten abziehen, von den Elementen der zweiten Spalte die der vierten, eine Umwandlung in die neue Form:

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_3 & a_2 - a_4 & a_3 & a_4 \\ a_2 - a_4 & a_1 - a_3 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & a_1 + a_3 & a_2 + a_4 \\ 0 & 0 & a_2 + a_4 & a_1 + a_3 \end{vmatrix}$$

oder auch:

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_3 & a_2 - a_4 \\ a_2 - a_4 & a_1 - a_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 + a_3 & a_2 + a_4 \\ a_2 + a_4 & a_1 + a_3 \end{vmatrix}$$

Man sieht daher, dass die Determinante vierter Ordnung sich auf das Produkt zweier Determinanten der zweiten Ordnung zurückführen lässt, die auf gleiche Weise gebildet sind. Für die Determinante vierter Ordnung ist also unser Lehrsatz bewiesen. Man erkennt jedoch leicht, dass man dasselbe für einen beliebigen Fall durch ein ähnliches Verfahren nachweisen kann, insofern nämlich stets die Determinante sich in der Weise umwandeln lässt, dass das gesammte quadratische Feld in der unteren und linken Hälfte des Schemas aus Elementen Null bestehend erscheint, und die beiden anderen Theilfelder, das obere zur Linken und das untere zur Rechten, Determinanten der halben Ordnungszahl werden, die jedoch in ihrer Bildung der vorgelegten Determinante ganz gleichartig sind. Damit ist dann der Lehrsatz im Allgemeinen erwiesen.

Dieselbe Eigenschaft bleibt auch gewahrt bei den ähnlichen und viel allgemeineren Determinanten (nämlich nicht nur von der Ordnung 2^μ), wie sie von den oben genannten Verfassern untersucht worden.

Es folge hier eine andere Eigenthümlichkeit der besprochenen Determinanten, die leicht zu erkennen ist:

Die algebraischen Komplemente zweier gleichen Elemente innerhalb einer solchen Determinante sind auch gleiche Determinanten, und mithin ist die zugehörige reziproke Determinante wiederum eine Determinante derselben Art.

Und überdies:

In einer Determinante von der angezeigten Art sind die komplementären Minoren mit der halben Ordnungszahl, abgesehen vom Vorzeichen, stets unter einander gleich.

Die erstere dieser beiden Eigenschaften ist ihnen mit den zyklischen Determinanten gemeinsam.

Es sind andere Determinanten untersucht worden, deren Bildung viel Entsprechendes zu denen Noethers aufweist.

W. Voigt behandelt auf dem Gebiete der Physik in einem Aufsatze Determinanten der Ordnung $(2n)$ und zwar der Beschaffenheit, dass ihre Elemente in den Beziehungen stehen:

$$a_{2k,2\lambda-1} = a_{2k-1,2\lambda}$$
$$a_{2k,2\lambda} = -a_{2k-1,2\lambda-1}$$

Für $n = 2$ erhält man dann zum Beispiel eine Determinante folgender Gestalt:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ e & f & g & h \\ f & -e & h & -g \end{vmatrix}$$

Es wird der Nachweis erbracht, dass eine solche Determinante die Summe von zwei Quadraten ist.

Den nämlichen Gegenstand betreffend kann man auch eine Arbeit von Drude und eine Mittheilung von Baltzer vergleichen.

Gegenbauer behandelt in zwei Noten andere, diesen entsprechende Determinanten und zwar findet er eine, die der Summe eines Quadrates und eines dreifachen Quadrates gleich kommt, und eine andere, die sich als Summe von vier Quadraten darstellt.

Voigt, Allgemeine Formeln für die Bestimmung der Elasticitätskonstanten von Krystallen u. s. w. Annalen der Physik und Chemie (Wiedemann) Neue Folge, Bd. 16 (1882) [273—321, 398—416] S. 314.

Drude, Ein Satz aus der Determinantentheorie. Ges. d. Wiss. Göttingen Nachr. (1887) [118—122].

Baltzer, Über einen Satz aus der Determinantentheorie. Ges. d. Wiss. Göttingen Nachr. (1887) [389—391].

Gegenbauer, Note über Determinanten. Akad. Wien, Ber. Bd. 96. Abth. 2 (1887) S. 5—7; Über eine specielle Determinante. Ebenda S. 489 f.

Die hier besprochenen Determinanten (wir nannten sie nach Puchta und Noether) sind in gewisser Weise verwandt mit den zyklischen. Wie diese, besitzen auch sie die bemerkenswerthe Eigenschaft, sich in ein Produkt von soviel rationalen linearen Faktoren zerlegen zu lassen, als ihre Ordnungszahl es angiebt.

Man wird viel allgemeinere Determinanten untersuchen können, die als besondere Arten sowohl die zyklischen, als die in diesem Paragraphen behandelten in sich begreifen werden.

Stellen wir uns n Grössen vor und eine Gruppe von Substitutionen mit Bezug auf diese Grössen, eine Gruppe, die nur n Substitutionen enthalte; das heisst, wie man sich in der Lehre von den Substitutionen ausdrückt, ihre Ordnung und ihr Grad seien einander gleich. Dann ordnen wir auf eine erste Zeile die n Elemente, auf die andern Zeilen vertheilen wir dieselben Elemente, nur in fortlaufender Reihe den Substitutionen der Gruppe gemäss vertauscht. Auf diese Weise gelangt man dazu, eine Determinante herzustellen, die im besonderen Fall die zyklischen und die von Puchta und Noether aus sich hervorgehen lässt.

§ 22—24. Über Determinanten, die aus Minoren einer andern gebildet sind.

§ 22. Lehrsätze von Spottiswoode (Sylvester) und Franke.

Wir haben gesehen, wie die zu einer vorgelegten Determinante reziproke mit Hilfe der algebraischen Komplemente zu den Elementen der gegebenen Determinante (also der Minoren $(n-1)$-ter Ordnung) gebildet wird (Siehe § 8), und es ist ferner deutlich geworden, dass einfache Beziehungen zwischen der reziproken und der gegebenen Determinante bestehen und desgleichen zwischen den Minoren der reziproken und denen der gegebenen.

Nun geht eine ganz natürliche Verallgemeinerung dieser Betrachtung darauf aus, sich mit Determinanten zu beschäftigen, die nicht mehr allein aus Minoren der Ordnung $(n-1)$ gebildet sind, sondern aus Minoren von beliebiger Ordnung.

So gestaltete Determinanten, die zusammengesetzten Determinanten (compound determinants) sind von einer grossen Zahl von Schriftstellern behandelt worden.

Es folge hier, der Zeit nach geordnet, ein Bericht über die Literatur dieses Gegenstandes, soweit seine Erörterung uns in diesem Paragraphen und den folgenden bis einschliesslich § 25 beschäftigen wird.

Cauchy in der oben S. 25 angeführten Abhandlung vom Jahre 1812 theilt den ersten der Lehrsätze mit, die im Folgenden abgeleitet werden. Journ. de l'éc. pol. cah. 17 S. 102.

Die Hauptsätze dieses Lehrgebiets sind zuerst, allerdings ohne Beweis, durch Sylvester bekannt gegeben worden. Sie erscheinen in der von ihm ausgebildeten und als Werkzeug der Forschung hochbewertheten Schreibweise der umbral notation.

Sylvester, On the relation between the minor determinants of linearly equivalent quadratic functions. Phil. Mag. ser. 4 vol. 1 (1851) [295—305].

Verbesserungen zu diesem Abdruck giebt der Verfasser im Cambr. Dubl. math. Journ. vol. 8. S. 62.

Spottiswoode, Elementary theorems relating to determinants. Journ. f. Math. Bd. 51 (1856) [209—271. 328—381], darin § 10. On compound determinants [350—372]. Dieser Abhandlung (geschrieben 1853) war im Jahre 1851 unter gleichem Titel eine gesondert erschienene Schrift vorausgegangen.

Janni, G., Nota sopra i determinanti minori di un dato determinante. Giorn. di Batt. vol. 1 (1863) [270—275].

Franke, Über Determinanten aus Unterdeterminanten. Journ. f. Math. Bd. 61 (1863) [350—355].

Borchardt, Anmerkungen zum eben genannten Aufsatze Frankes, ebenda S. 353 und 355, wieder abgedruckt in Borchardts Werken [479—482].

Reiss, Beiträge zur Theorie der Determinanten. Leipzig 1867.

Mit einer der Sylvesterschen ähnlichen Bezeichnungsweise und auf Grund einiger Sätze über Determinantenerweiterung (Ränderung) wird hier die Lehre von den zusammengesetzten Determinanten aus einem Gesichtspunkte wesentlicher Verallgemeinerung behandelt und in einem Anhange auf ihre fruchtbare Anwendung im Gebiete der Geometrie hingewiesen.

D'Ovidio, Nota sui determinanti di determinanti. Acc. Tor. vol. 11 (1875—76) [949—956].

D'Ovidio, Addizioni alla nota sui determinanti di determinanti. Acc. Tor. vol. 12 (1876—77) [331—333].

Picquet, Sur les déterminants dont les éléments sont tous les mineurs possibles d'ordre donné d'un déterminant donné. C. R. t. 86 (1878) [310—312].

Picquet, a. a. O. Siehe oben S. 55, Journ. de l'éc. pol. cah. 45 t. 28 (1878) [201—243] S. 207 ff.

Frobenius, Über die schiefe Invariante einer bilinearen oder quadratischen Form. Journ. f. Math. Bd. 86 (1879) [44—71], in § 3 Sylvesters Determinantensatz S. 53 f.

Sylvester, Sur des déterminants composés. Journ f. Math. Bd. 88 (1880) [49—67] S. 51.

Borchardt, Remarque relative au mémoire de M. Sylvester sur les déterminants composés. Journ. f. Math. Bd. 89 (1880) [82—85], wieder abgedruckt in Borchardts Werken [494—497].

Hunyady, Sätze, welche sich auf Determinanten beziehen, deren Elemente aus den Elementen adjungierter Systeme zusammengesetzt sind. (Magyarisch.) Budapest Értek. Bd. 7. (1880) Nr. 19 [1—27].

Scott, On compound determinants. London Math. Soc. Proc. vol. 14 (1882—83) [91—102].

Barbier, Sur une formule de Lagrange déjà généralisée par Cauchy. Nouvelle généralisation. C. R. t. 96 (1883) [1845—1849].

Barbier, Généralisation du théorème de Jacobi sur les déterminants partiels du système adjoint. C. R. t. 97 (1883) [82—85].

Van Velzer, Compound determinants. Amer. Journ. vol. 6 (1884) [164—172].

D'Ovidio, Altra addizione alla nota »sui determinanti di determinanti«. Acc. Tor. vol. 26 (1890—91) [131—133].

Netto, Zwei Determinantensätze. Acta math. Bd. 17 (1893) [199—204].

Musso, Sui determinanti reciproci. Giorn. di Batt. vol. 31 (1893) [201—209].

In letzterem Aufsatze ist der Verfasser aus Unbekanntschaft mit den vorangegangenen Untersuchungen zu einem nur unvollständigen Lehrsatze gelangt, er hat dann in einer zweiten Veröffentlichung über denselben Gegenstand hauptsächlich die Arbeiten von D'Ovidio verwerthet.

Musso, Ancora sui determinanti reciproci. Giorn. di Batt. vol. 32 (1894) [81—85].

Frobenius, Über das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen. Math. Mitth. Sitzber. Berlin 1894 [79—94, 135—159] in § 1 Sylvesters Determinantensatz S. 80—83 = Akad. Berlin. Ber. 1894 [241—256, 407—431] § 1 S. 242 ff. Wieder abgedruckt in Journ. f. Math. Bd. 114 (1895) [187—230] § 1 S. 189 ff.

Netto, Erweiterung des Laplaceschen Determinanten-Zerlegungssatzes. Journ. f. Math. Bd. 114 (1895) [345—352].

Igel, Beweis einiger Determinantentheoreme von Sylvester. Monatsh. f. Math. 9. Jahrg. (1898) [47—54].

Bezeichnen wir die Binomialzahlen durch das Symbol

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\ 2\cdots m} = (n)_m$$

so gehören zu einer Determinante D von n-ter Ordnung

$$\binom{n}{m}^2$$

Minoren der Ordnung $m < n$. Denn ein Minor m-ter Ordnung entsteht ja, wenn wir m horizontale und m vertikale Reihen auswählen. Nun können wir die m horizontalen Reihen auf genau ebensoviel verschiedene Weisen wählen, wie die m vertikalen Reihen; die Anzahl der möglichen Wahlergebnisse ist in beiden Fällen der Binomialkoeffizient $(n)_m$.

Wir bilden mit diesen $(n)_m^2$ Minoren als Elementen eine Determinante, deren Ordnung wiederum diesem Binomialkoeffizienten gleich kommt. Auf dieselbe Zeile setzen wir alle die Minoren, die mittelst derselben m Zeilen von D hergestellt sind, und auf dieselbe Spalte diejenigen, zu deren Bildung dieselben m Spalten von D Verwendung fanden.

Wir können diese Elemente in solcher Anordnung voraussetzen, dass auf der Hauptdiagonale der neuen Determinante die Hauptminoren m-ter Ordnung der gegebenen erscheinen; dann erkennt man leicht rücksichtlich der Herkunft konjugierter Elemente die Richtigkeit der folgenden Beschreibung. Wenn das Element in der neuen Determinante, welches seine Stellung gemäss den Indices r, s einnimmt, der Minor ist, der durch die Zeilen mit Ordnungszahlen $l_1\, l_2 \ldots l_m$ und die Spalten mit Ordnungszahlen $c_1\, c_2 \ldots c_m$ gebildet wurde, so wird das Element, das die Stelle mit den Indices s, r erhält, aus den Zeilen $c_1\, c_2 \ldots c_m$ und den Spalten $l_1\, l_2 \ldots l_m$ entstanden sein.

Um zu einer bestimmteren Vorstellung über die Anordnung der Elemente zu gelangen, dürfen wir annehmen, dass innerhalb der ersten Zeile zunächst alle Minoren gerader Klasse und dann in der Folge alle der ungeraden Klasse angehörenden aufzureihen sind. Es wird dann leicht ersichtlich, dass die Matrix in vier Abtheilungen zerlegt werden kann, in zwei quadratische, welche durch die Hauptdiagonale

halbiert werden, und zwei rechteckige, dergestalt, dass im ersten Quadrate, dem oberen zur Linken, lauter Minoren gerader Klasse sich befinden, im unteren Quadrate, auf der rechten Seite, wiederum sämmtliche Minoren der geraden Klasse angehören und dass in den beiden Rechtecken, dem oberen zur Rechten und dem unteren zur Linken, nur Minoren ungerader Klasse vorkommen. Diese sind demnach in s Zeilen und s Spalten vertheilt, deren s^2 Schnittpunkte Minoren der geraden Klasse entsprechen.

Wir dürfen willkürlich annehmen, dass die Minoren der ungeraden Klasse in dieser Determinante mit negativem Zeichen auftreten oder auch mit positivem Zeichen gleich den andern. Der Werth der Determinante wird in jedem Fall derselbe sein, ob nun in dem einen oder anderen Sinne Verfügung getroffen wird, da ja eine Determinante unverändert bleibt, wenn man die Vorzeichen bei den Elementen ändert, die auf s Zeilen stehen und zugleich bei denen, die sich auf s Spalten befinden, aber nicht bei denen, welche die Schnittstellen dieser s Zeilen und s Spalten einnehmen.

Wir wollen die so gebildete Determinante D_m nennen.

Auf ähnliche Weise können wir die Determinante D_{n-m} herstellen und in dieser die Elemente so vertheilen, dass in D_m und in D_{n-m} die komplementären Minoren von D homologe Stellen einnehmen.

Bei einer dieser beiden Determinanten werden wir das Zeichen der Elemente, die Minoren ungerader Klasse sind, ändern und dann das Produkt von D_m in D_{n-m} bilden.

Es ist leicht einzusehen, dass in dem Produkte alle Elemente, mit Ausnahme derer, die die Hauptdiagonale der Produktdeterminante bilden, verschwinden. Und zwar folgt dies nach dem Lehrsatze, dass die Summe der Produkte in m Reihen enthaltener Minoren in die algebraischen Komplemente der entsprechenden Minoren, die m parallelen Reihen angehören, Null ist. (Siehe S. 19.) Die Elemente der Hauptdiagonale im Gegentheil werden sämmtlich der vorgelegten Determinante D gleich. Also dürfen wir schliessen:

$$D_m \cdot D_{n-m} = D^{\binom{n}{m}}$$

Dies Ergebniss findet sich bei Cauchy in seiner Abhandlung vom Jahre 1812.

Beachten wir, dass D_m sowohl als D_{n-m} ganze Funktionen der Elemente von D sind, und D, solange es eine allgemeine Determinante vorstellt, nicht in Faktoren zerfallen wird, die als ganze rationale Funktionen seiner n^2 Elemente anzusehen wären, so erkennen

wir, dass die vorangehende Beziehung nur dann bestehen kann, wenn jeder der Faktoren des ersten Gliedes der Gleichung seinerseits eine Potenz von D ist.

Zu bestimmen, mit welcher Potenz von D der Faktor D_m übereinkommt, bedarf es nur eines Blickes auf die Gradzahl eines beliebigen Gliedes von D_m.

Nun geht jedes Glied von D_m aus $(n)_m$ Faktoren hervor, von denen ein jeder den Grad m besitzt, folglich gehört zu einem beliebigen Gliede von D_m die Gradzahl:

$$m\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\ 2\cdots(m-1)}$$

während in D ein jedes Glied vom Grade n ist. Mithin wird D_m gleich sein der Potenz

$$\frac{m}{n}\binom{n}{m}$$

von D, also:

$$D_m = D^{\binom{n-1}{m-1}}$$

und folglich auch:

$$D_{n-m} = D^{\binom{n-1}{m}}$$

Um sich zu überzeugen, dass diese Gleichungen auch dem Vorzeichen nach bestehen müssen, genügt es, in D für alle Elemente, mit Ausnahme der Hauptelemente, den Werth Null vorauszusetzen. Dann verschwinden auch in D_m alle Elemente bis auf die Hauptelemente, und die beiden Glieder der Gleichung werden ohne Weiteres im Werthe und im Zeichen gleich.

Wir können daher sagen:

Ist eine Determinante D von n-ter Ordnung vorgelegt, und bildet man in der angezeigten Weise die Determinante der Ordnung $(n)_m$, deren Elemente die sämmtlichen Minoren m-ter Ordnung der gegebenen Determinante sind, so erhält man eine Determinante, die die Potenz $(n-1)_{m-1}$ der gegebenen darstellt. (Spottiswoode, — Sylvester.)

Dieser Lehrsatz ist in der oben angeführten Abhandlung von Spottiswoode (1856) ausdrücklich erörtert worden, neben ihm findet dort der vordem von Sylvester ausgesprochene allgemeine Determinantensatz Erwähnung, den wir in § 23 darlegen werden. Wenige Jahre später (1863) tritt in dem Frankeschen Aufsatze der uns vor-

liegende Satz wie ein neues Ergebniss auf und Borchardt fügt die Bemerkung hinzu, er sei als besonderer Fall eines Sylvesterschen Satzes aufzufassen, womit ersichtlich auf jene allgemeinere Sylvestersche Formel, die wir im folgenden Paragraphen mittheilen werden, angespielt ist. Später ist der nämliche Lehrsatz noch ein zweites Mal und zwar durch D'Ovidio (1876) als neu veröffentlicht worden. Doch hat bald darauf dieser Verfasser in einer ergänzenden Notiz erklärt, dass Spottiswoode das Verdienst der ersten Mittheilung gebühre. Sylvester bekundet dann im Jahre 1880 in einer Anmerkung, der gedachte Satz sei in seinem Aufsatze von 1851 enthalten. Danach hat Barbier (1883) einen besonderen Fall unseres Lehrsatzes mit dem Anspruch des Neuen veröffentlicht und D'Ovidio hierauf wiederum (1890) in einer wesentlich geschichtlichen Anmerkung Bezug genommen.

Die Vorarbeiten, die diesem Gegenstande gewidmet worden sind, haben demnach das eigenthümliche Schicksal gehabt, wiederholentlich unberücksichtigt zu bleiben, wiewohl die Determinantenforschung derzeit mit vorwiegendem Interesse sich auf dem Gebiete der aus Minoren einer gegebenen Determinante zusammengesetzten Systeme bethätigte.

Wie man sieht, schliesst dieser Lehrsatz als besonderen Fall den über die reziproken Determinanten (Siehe S. 32) in sich.

Wir wollen nunmehr untersuchen, ob hier auch ein entsprechender Lehrsatz zu dem zweiten, den wir im Fall der reziproken Determinante gefunden haben, sich aufstellen lässt, und der dort den Werth eines Minors der reziproken Determinante aus den Minoren der vorgelegten zu bestimmen erlaubte.

Um ganz bestimmte Vorstellungen zu erwecken und um die Darlegung deutlicher zu gestalten, ist es bei weitem besser, wenn wir einen besonderen Fall voraussetzen und an diesem unser Verfahren ausführen. Dasselbe ist, wie man leicht erkennt, von der Art, dass es stets auf einen umfassenderen Fall ausgedehnt werden mag.

Es sei die Determinante D von 4-ter Ordnung und $m = 2$. Die beiden Determinanten D_m und D_{n-m} werden von 6-ter Ordnung sein. Die Minoren $A^{(2)}$, das heisst die Elemente von D_2 bezeichnen wir mit

$$\begin{pmatrix} i & j \\ k & h \end{pmatrix},$$

indem wir unter $(i\,j)$, $(k\,h)$ beziehungsweise die beiden Indices der Zeilen und der Spalten verstehen, die an der Bildung des Minors betheiligt sind.

Danach wird die Determinante D_2 sich darstellen in der Gestalt:

$$D_2 = \begin{vmatrix} \binom{12}{12} & \binom{12}{23} & \binom{12}{34} & \binom{12}{14} & \binom{12}{13} & \binom{12}{24} \\ \binom{23}{12} & \binom{23}{23} & \binom{23}{34} & \binom{23}{14} & \binom{23}{13} & \binom{23}{24} \\ \binom{34}{12} & \binom{34}{23} & \binom{34}{34} & \binom{34}{14} & \binom{34}{13} & \binom{34}{24} \\ \binom{14}{12} & \binom{14}{23} & \binom{14}{34} & \binom{14}{14} & \binom{14}{13} & \binom{14}{24} \\ \binom{13}{12} & \binom{13}{23} & \binom{13}{34} & \binom{13}{14} & \binom{13}{13} & \binom{13}{24} \\ \binom{24}{12} & \binom{24}{23} & \binom{24}{34} & \binom{24}{14} & \binom{24}{13} & \binom{24}{24} \end{vmatrix}$$

Die Determinante D_{n-m} ist dieselbe wie D_2, wobei jedoch die Ordnung aller Elemente in angemessener Weise geändert erscheint, nämlich:

$$D_{n-m} = D_2' = \begin{vmatrix} \binom{34}{34} & \binom{34}{14} & \binom{34}{12} & \binom{34}{23} & \binom{34}{24} & \binom{34}{13} \\ \binom{14}{34} & \binom{14}{14} & \binom{14}{12} & \binom{14}{23} & \binom{14}{24} & \binom{14}{13} \\ \binom{12}{34} & \binom{12}{14} & \binom{12}{12} & \binom{12}{23} & \binom{12}{24} & \binom{12}{13} \\ \binom{23}{34} & \binom{23}{14} & \binom{23}{12} & \binom{23}{23} & \binom{23}{24} & \binom{23}{13} \\ \binom{24}{34} & \binom{24}{14} & \binom{24}{12} & \binom{24}{23} & \binom{24}{24} & \binom{24}{13} \\ \binom{13}{34} & \binom{13}{14} & \binom{13}{12} & \binom{13}{23} & \binom{13}{24} & \binom{13}{13} \end{vmatrix} .$$

Wir wollen nun einen beliebigen Minor von D_2 betrachten und zwar wollen wir dazu im Besonderen den ersten Hauptminor 3-ter Ordnung wählen und diesen, wie folgt, schreiben:

$$N = \begin{vmatrix} \binom{12}{12} & \binom{12}{23} & \binom{12}{34} & \binom{12}{14} & \binom{12}{13} & \binom{12}{24} \\ \binom{23}{12} & \binom{23}{23} & \binom{23}{34} & \binom{23}{14} & \binom{23}{13} & \binom{23}{24} \\ \binom{34}{12} & \binom{34}{23} & \binom{34}{34} & \binom{34}{14} & \binom{34}{13} & \binom{34}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} .$$

Auf solche Art ist der gedachte Minor in die Form einer Determinante 6-ter Ordnung, D_2' entsprechend, übergeführt. Wir multiplizieren ihn mit D_2', nachdem in D_2' bei allen Elementen, die Minoren ungerader Klasse vorstellen, die Zeichen geändert worden. Demnach haben Zeichenwechsel erfahren die Elemente der Stellen:

$$\begin{matrix} 15, & 16, \\ 25, & 26, \\ 35, & 36, \\ 45, & 46, \\ 51, & 61, \\ 52, & 62, \\ 53, & 63, \\ 54, & 64. \end{matrix}$$

Führen wir nun die Multiplikation nach Zeilen aus, so ergiebt sich:

$$\begin{vmatrix} D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 & 0 & 0 \\ \binom{34}{23} & \binom{14}{23} & \binom{12}{23} & \binom{23}{23} & \binom{24}{23} & \binom{13}{23} \\ \binom{34}{24} & \binom{14}{24} & \binom{12}{24} & \binom{23}{24} & \binom{24}{24} & \binom{13}{24} \\ \binom{34}{13} & \binom{14}{13} & \binom{12}{13} & \binom{23}{13} & \binom{24}{13} & \binom{13}{13} \end{vmatrix}$$

und dies ist gleich:

$$D^3 . \begin{vmatrix} \binom{23}{23} & \binom{24}{23} & \binom{13}{23} \\ \binom{23}{24} & \binom{24}{24} & \binom{13}{24} \\ \binom{23}{13} & \binom{24}{13} & \binom{13}{13} \end{vmatrix}$$

Also lautet das Ergebniss in Worten: Das Produkt des Minors 3-ter Ordnung N, den wir hervorgehoben, und der Determinante D_{n-m} ist gleich der dritten Potenz von D, multipliziert mit dem Komplement des zu N homologen Minors in der Determinante D_{n-m}. Unser Verfahren, das nur die angemessene Erweiterung des für den entsprechenden Fall der reziproken Determinanten angewandten darstellt (Siehe § 8),

ist durchaus allgemein und man erkennt daher, dass der Lehrsatz ausgesprochen werden kann:

Das Produkt eines Minors $N_m^{[k]}$ von k-ter Ordnung aus der Determinante D_m mit D_{n-m} ist gleich der k-ten Potenz von D, multipliziert mit dem algebraischen Komplemente des homologen Minors zu N aus D_{n-m}.

Also ist:

$$N_m^{[k]} \, . \, D_{n-m} = D^k \, . \, N'^{\left[\binom{n}{m}-k\right]}_{n-m}$$

wenn wir mit

$$N'^{\left[\binom{n}{m}-k\right]}_{n-m}$$

das Komplement des homologen Minors zu N in D_{n-m} bezeichnen. (Die eckige Klammer mag dabei zu leichterer Unterscheidung von Potenzexponenten die Ordnung der Unterdeterminante andeuten helfen.) Wir wissen weiter, dass:

$$D_{n-m} = D^{\binom{n-1}{m}}$$

und daher ergiebt sich:

$$N_m^{[k]} = N'^{\left[\binom{n}{m}-k\right]}_{n-m} \, . \, D^{k-\binom{n-1}{m}}$$

Hieraus erhellt der Lehrsatz:

Ein Minor N von D_m lässt sich als Produkt darstellen, in welchem eine gewisse Potenz von D mit dem algebraischen Komplement des zu N homologen Minors in D_{n-m} multipliziert erscheint. (Dies der Lehrsatz von Franke in dessen oben angeführter Abhandlung.)

Über die Beziehung dieses Lehrsatzes von Franke zu dem Jacobischen Satze von den Minoren der reziproken Determinante siehe Reiss a. a. O. S. 50 und Kronecker, Die Subdeterminanten symmetrischer Systeme. Ak. Berlin Ber. Juni—Dec. 1882 [821—824]. Wieder abgedruckt in Kroneckers Werken Bd. 2 [391—396].

§ 23. Weitere Lehrsätze: von Sylvester, D'Ovidio und Anderen.

An diese beiden grundlegenden Lehrsätze gliedert sich eine grosse Zahl anderer Lehrsätze an, die von verschiedenen Schriftstellern aufgefunden sind und zu deren Erörterung wir jetzt schreiten.

Wir bilden eine Determinante Δ der Ordnung $(n)_m$. Es sollen deren Elemente die Produkte der homologen Elemente aus den beiden Determinanten D_m und D_{n-m} sein. Wir

machen hierbei über diese Determinanten die Annahme, dass ihre homologen Elemente komplementäre Minoren von D sind und dass in einer von beiden Elemente, die Minoren ungerader Klasse vorstellen, mit verändertem Vorzeichen geschrieben stehen. Eine solche Determinante Δ ist gleich einem Vielfachen von D. (D'Ovidio).

Und wirklich ergiebt sich, wenn man in derselben zur ersten Spalte alle die andern hinzufügt, eine Spalte, deren sämmtliche Elemente gleich D sind, mithin erscheint die Determinante durch D theilbar.

Wenn man, bevor Δ gebildet wird, bei einer der Determinanten D_m, D_{n-m} die Zeilen derart vertauscht, dass wenigstens eine Zeile auf ihrem Platze bleibt, so ist das Ergebniss dasselbe, weil man doch bei Anwendung des nämlichen Verfahrens in der ersten Spalte entweder Elemente Null oder Elemente D erhält; behält im Gegentheil keine einzige Zeile ihre ursprüngliche Stelle bei, dann tritt augenfällig für die fraglichen Elemente der Werth Null auf, das heisst, es wird dann Δ selbst verschwinden.

Innerhalb der Determinante D wollen wir λ Zeilen und λ Spalten durch unsere Aufmerksamkeit auszeichnen: es sei $D_{\lambda\lambda}$ der Minor von D, welcher bei Tilgung der λ Zeilen und λ Spalten hervorgeht. In der zu D reziproken Determinante, nämlich in D_{n-1} betrachten wir die homologen λ Zeilen und Spalten und C_λ heisse der Minor von D_{n-1}, der durch die Schnittstellen dieser λ Zeilen und Spalten gebildet wird, also das Komplement des zu $D_{\lambda\lambda}$ homologen Minors in D_{n-1}.

Wir wissen, dass unter diesen Umständen sich die Gleichung ergiebt:

$$C_\lambda = D^{\lambda-1} D_{\lambda\lambda}$$

Die λ Zeilen und Spalten, die in D ausgewählt wurden, verbinden wir nun unter sich zu je m und unterdrücken nacheinander die m Zeilen und m Spalten einer jeden solchen Kombination. Wir erhalten im Ganzen $(\lambda)_m^2$ Minoren von D, lauter Minoren von der Ordnung $(n-m)$, und diese lassen sich in gewohnter Weise so anordnen, dass sie die Matrix einer Determinante von der Ordnung $(\lambda)_m$ bilden, die nichts andres ist, als ein besonderer Minor der Determinante D_{n-m}. Der so gewonnene Minor heisse $D_{\lambda m}$. Multipliziert man jedes einzelne Element dieses Minors von D_{n-m} mit D^{m-1}, so erhellt aus dem Lehrsatze über die Minoren reziproker Determinanten, dass allemal das

Ergebniss der Multiplikation ein Minor m-ter Ordnung der Determinante C_λ wird, und man gewinnt in Folge davon die Determinante aller Minoren m-ter Ordnung der Determinante C_λ.

In Anwendung des oben bewiesenen Lehrsatzes (Siehe S. 87) kommt diese Determinante aber dem Werthe nach überein mit der Potenz:

$$C_\lambda^{\binom{\lambda-1}{m-1}}$$

mithin wird:

$$D_{\lambda m} \,.\, D^{\binom{\lambda}{m}(m-1)} = C_\lambda^{\binom{\lambda-1}{m-1}} = D^{\binom{\lambda-1}{m-1}(\lambda-1)} D_{\lambda\lambda}^{\binom{\lambda-1}{m-1}}$$

und daraus geht hervor:

$$D_{\lambda m} = D^{\binom{\lambda-1}{m}} D_{\lambda\lambda}^{\binom{\lambda-1}{m-1}}$$

(Der hier von uns gegebene Nachweis ist der oben angeführten Arbeit von D'Ovidio Bd. 11 S. 953 f. der Atti di Torino entnommen.)

Wir gewinnen hierdurch den folgenden Lehrsatz Sylvesters (a. a. O. S. 304):

Innerhalb der Determinante D_{n-m} ist ein Minor $D_{\lambda m}$ von der Ordnung $(\lambda)_m$ $(\lambda > m)$, dessen Elemente Minoren von D sind, gebildet aus $(n-\lambda)$ festen Zeilen und Spalten und allen Kombinationen von $(\lambda - m)$ der übrigen, gleich der Potenz $(\lambda - 1)_m$ von D, multipliziert in die Potenz $(\lambda - 1)_{m-1}$ desjenigen Minors von D, der aus den $(n - \lambda)$ festen Zeilen und Spalten hervorgeht.

Vorstehender Lehrsatz ist durch Sylvester (1851) ohne Beweis veröffentlicht worden, ein zweites Mal durch D'Ovidio.

Für $\lambda = n$ und mit der Übereinkunft $D_{nn} = 1$ ergiebt sich aus ihm der Satz des vorigen Paragraphen (Siehe S. 87). Will man übrigens diese künstliche Bestimmung $D_{nn} = 1$ vermeiden, so lässt sich der frühere Lehrsatz auch in der folgenden strengen Weise auf das vorliegende Ergebniss zurückführen. Wir wollen der Determinante D eine Zeile und eine Spalte hinzugefügt denken, die mit Nullen besetzt sein mögen, an deren Kreuzungsstelle aber das Element 1 auftreten soll. Der Werth von D bleibt hierdurch ungeändert, doch wird die Ordnung der Determinante auf $(n+1)$ erhöht. Setzen wir nun $\lambda = n$, so haben wir unseren Lehrsatz dergestalt anzuwenden, dass wir für die $(n-\lambda)$ festen Reihenpaare (es wird hier $(n-\lambda)$ doch $(n+1-\lambda)$, also $(n+1-n)=1$) gerade das beigefügte Reihenpaar wählen. Damit ergiebt sich $D_{\lambda\lambda} = 1$ und $D_{\lambda m} = D_{n-m}$ in der Bezeichnungsweise des § 22.

Frobenius hat (a. a. O. Siehe unser Literaturverzeichniss S. 84 f.) auf völlig abweichende Art einen besonderen Fall des vorliegenden Sylvesterschen Satzes erwiesen, nämlich den Fall, wo $m = \lambda - 1$ gesetzt wird, desgleichen Netto in § 3 (auf Seite 201) seines Aufsatzes: Zwei Determinantensätze. Auf unsern allgemeinen Lehrsatz ist Netto erst später zu sprechen gekommen, bei Gelegenheit einer anderen Betrachtung, die wir in Kurzem werden zu erörtern haben. (Siehe S. 97 ff.)

Eigenartig ist das Verfahren von Reiss, der (a. a. O. Art. 14. S. 34 f.) den vorliegenden Determinantensatz aus dem Sylvesterschen Satze des vorigen Paragraphen unmittelbar durch Erweiterung der Elemente des Minorensystems ableitet, wie er auch den genannten besonderen Fall unseres Lehrsatzes (Art. 6. S. 15 f.) aus einer noch einfacheren Identität auf gleichem Wege gewinnt. Völlig abweichend ist eine Begründung des Sylvesterschen Satzes durch Picquet, wovon in § 28 noch eine Andeutung gegeben werden wird.

Der Unterdeterminante $D_{\lambda m}$ in D_{n-m} können wir in D_m das Komplement der zu ihr homologen zuordnen, das von der Ordnung $(n)_m - (\lambda)_m$ ist und nach einem oben bewiesenen Lehrsatze (dem Lehrsatz von Franke, siehe S. 91) gleichkommt:

$$D_{\lambda m} \, . \, D^{\binom{n}{m} - \binom{\lambda}{m} - \binom{n-1}{m}}$$

oder, mit Anwendung des vorausgehenden Satzes, gleich:

$$D^{\binom{\lambda-1}{m} + \binom{n}{m} - \binom{\lambda}{m} - \binom{n-1}{m}} \, . \, D_{\lambda\lambda}^{\binom{\lambda-1}{m-1}} = D^{\binom{n-1}{m-1} - \binom{\lambda-1}{m-1}} \, . \, D_{\lambda\lambda}^{\binom{\lambda-1}{m-1}}$$

Der Minor von D_m, um den es sich hier handelt, hat zu Elementen solche Minoren m-ter Ordnung von D, gebildet also mit m Zeilen und m Spalten jener Determinante, die nicht durchaus alle unter den λ in Betracht gezogenen Zeilen und Spalten vorkommen. Denn der homologe Minor zu $D_{\lambda m}$ in D_m ist doch mittelst aller der Minoren m-ter Ordnung von D hergestellt, die sämmtlich in den bestimmten λ Zeilen und Spalten enthalten sind, also mit andern Worten mittelst aller Minoren m-ter Ordnung des Komplementes von $D_{\lambda\lambda}$, und mithin kann sein Komplement als Element keinen einzigen Minor dieser Herkunft enthalten.

Wir gewinnen hierdurch den Lehrsatz von D'Ovidio:

Ein Minor von der Ordnung $(n)_m - (\lambda)_m$ innerhalb der Determinante D_m $(\lambda > m)$, als dessen Elemente sich alle Minoren m-ter Ordnung von D darstellen, zu deren Bildung weder die Zeilen noch die Spalten sämmtlich unter be-

stimmten λ Zeilen und λ Spalten ausgewählt wurden, ist gleich der Potenz

$$\left[\binom{n-1}{m-1}-\binom{\lambda-1}{m-1}\right]$$

von D, multipliziert mit der Potenz

$$\binom{\lambda-1}{m-1}$$

desjenigen Minors von D, der bei Tilgung jener λ Zeilen und λ Spalten sich ergiebt.

Dem entsprechend wird man eine Formel auffinden können für das Komplement von $D_{\lambda m}$ in D_{n-m}, welches in D_{n-m} der homologe Minor zu dem zuletzt betrachteten Minor von D_m ist. Man erhält auf diesem Wege wieder eine Formel von D'Ovidio (a. a. O.).

Und auf ähnliche Art würde man weitere Lehrsätze von D'Ovidio, von Picquet und Anderen finden, die wir der Kürze wegen übergehen wollen.

§ 24. Die allgemeinere Aufgabe Sylvesters.

In der oben (Siehe S. 84) angeführten Abhandlung von Sylvester (Journ. f. Math. Bd. 88) will der Verfasser nach Einführung einer schwierigen und unnöthig verwickelten Bezeichnung die folgende Aufgabe lösen.

Es sei eine Determinante vorgelegt von der Ordnung:

$$n_1 + n_2 + \cdots = n$$

Unter den ersten n_1 Zeilen wählen wir m_1, unter den n_2 folgenden m_2 und so fort und verfahren dann auf ähnliche Weise in Hinsicht auf die Spalten. Alle Elemente, die sich auf den Schnittpunkten der $m_1 + m_2 + \cdots$ ausgewählten Zeilen und der gleich vielen Spalten befinden, bilden ihrerseits eine Determinante der Ordnung $m_1 + m_2 + \cdots = m$, die augenscheinlich ein Minor der vorgelegten sein wird.

Wir stellen nun alle möglichen Minoren dieser Art her; ihre Anzahl wird sein:

$$\left[\binom{n_1}{m_1}\binom{n_2}{m_2}\cdots\right]^2$$

Aus ihnen als Elementen würde es erlaubt sein, wiederum eine Determinante entstehen zu lassen, und diese nennt Sylvester im allgemeineren Sinne die zusammengesetzte Determinante. Wenn im Besonderen $n_2 = n_3 = \cdots = 0$, $n_1 = n$ ist, dann kommt man,

wie ohne Weiteres einleuchtet, auf den vorher betrachteten Fall zurück. Für diesen besonderen Fall wissen wir aber, dass die Determinante, die man bilden will, eben eine Potenz der ursprünglichen ist.

Nun stellt sich Sylvester die Aufgabe, diesen Lehrsatz auf den allgemeineren Fall auszudehnen.

Nennen wir (N_1), $(N_2)\cdots$ die Determinanten, welche durch die Kreuzungen der ersten n_1 Zeilen mit den ersten n_1 Spalten entstehen, dann der folgenden n_2 Zeilen mit den n_2 Spalten und so fort, und bezeichnen wir überdies mit $(N_1 N_2)$, $(N_1 N_3)\cdots$ diejenigen Determinanten, die mit Hilfe der $(n_1 + n_2)$ Zeilen und Spalten, der $(n_1 + n_3)$ Zeilen und Spalten, ... hergestellt sind, so fand Sylvester eine Formel, mittelst deren die allgemeine zusammengesetzte Determinante sich als Produkt von Potenzen der (N_1), (N_2), $\cdots$ $(N_1 N_2)$, $(N_1 N_3)$, $\cdots$ $(N_1 N_2 N_3)$, $\cdots$ ausdrücken liess. Und dies sind im Grunde gewisse besondere Hauptminoren der vorgelegten Determinante.

Die Formel Sylvesters ist jedoch irrig, und es wurde dies bald danach, im folgenden Bande des Crelleschen Journals, an Hand eines Beispiels von Borchardt (im Namen Sylvesters) anerkannt. (Siehe oben S. 84.)

Um einzusehen, dass es thatsächlich nicht möglich ist, diese zusammengesetzte Determinante in Form eines Produktes solcher Hauptminoren, wie: (N_1), $(N_1 N_2)$, $\cdots$ darzustellen, wollen wir einen besonderen Fall berechnen.

Wir nehmen an:

$$n_1 = 2, \quad n_2 = 2, \quad n_1 + n_2 = n = 4$$
$$m_1 = m_2 = 1 \qquad m_1 + m_2 = m = 2$$

Dann hat man es mit einer Determinante D der vierten Ordnung zu thun, deren Matrix man sich in vier Quadrate getheilt vorstellen darf.

Wir benennen, wie aus folgendem Schema

$$\begin{matrix} N_1 & N_{12} \\ N_{21} & N_2 \end{matrix}$$

ersichtlich wird, der oben eingeführten Bezeichnungsweise gemäss die durch jene vier Theilmatrices vorgestellten Determinanten.

Verknüpfen wir nun paarweise die erste und zweite Zeile mit der dritten und vierten und machen entsprechende Kombinationen bei den Spalten, so erhalten wir im Ganzen 16 Minoren der zweiten Ordnung, die ihrerseits eine Determinante $D_2^{(4)}$ von 4-ter Ordnung bilden, und sie ist ein Minor 4-ter Ordnung der Determinante 6-ter Ordnung $D_m = D_2$ nach der vorher angenommenen Bezeichnung.

Die Determinante D_{n-m} ist dasselbe D_2, wobei jedoch passende Vertauschungen von Zeilen und Spalten vorgenommen sind. Leicht erkennt man (an Hand der schematischen Darstellungen auf Seite 89), dass das Komplement des homologen Minors zu $D_2^{(4)}$ in D_{n-m} genau der Determinante 2-ter Ordnung

$$(N_1 N_2 - N_{12} N_{21})$$

gleichkommt und mithin ergiebt sich, nach der im Lehrsatz Frankes aufgestellten Formel, dass die zusammengesetzte Determinante (weil $D = (N_1 N_2)$ zu setzen) gleich ist:

$$(N_1 N_2)\,(N_1 N_2 - N_{12} N_{21})$$

und sich daher nicht einzig als Produkt der $(N_1 N_2)$, N_1, N_2 darstellen lässt, wie es die Formel Sylvesters verlangen würde.

Bemerkenswerth ist die Beobachtung, dass allerdings in besonderen Fällen der durch die Sylvestersche Formel gewünschte Ausdruck möglich wird.

Setzen wir zum Beispiel voraus, es handle sich um eine Determinante der Ordnung $n_1 + n_2 = n$ und man nehme

$$m_1 = n_1 = n - \lambda, \quad n_2 = \lambda, \quad m_2 = \lambda - m.$$

Dann kommt man zu den Voraussetzungen eines oben bewiesenen Satzes, der eben auch von Sylvester herrührt, zurück (Siehe S. 93), und die zusammengesetzte Determinante geht in die von uns als $D_{\lambda m}$ bezeichnete über. Diese lässt sich aber, wie wir wissen, als Produkt ausdrücken von Potenzen der ganzen Determinante und des Hauptminors, der aus den ersten n_1 Zeilen und Spalten gebildet ist.

§ 25. Neue Untersuchungen von Netto und von Pascal.

Bevor wir diesen Gegenstand verlassen, haben wir Untersuchungen von Netto einzuschalten, die sich den bisher entwickelten Betrachtungen ganz nahe anschliessen. Wir beabsichtigen von jenem Aufsatze Nettos zu sprechen, der betitelt ist: Erweiterung des Laplaceschen Determinanten-Zerlegungssatzes. (Siehe S. 85.)

Wir wollen den Minor, den man aus einer vorgelegten Determinante n-ter Ordnung erhält, wenn man die Zeilen mit Ordnungszahlen $i_1 i_2 \ldots i_k$ und die Spalten mit Ordnungszahlen $j_1 j_2 \ldots j_k$ unterdrückt, bezeichnen:

$$\Delta_{\substack{i_1 i_2 \ldots i_k \\ j_1 j_2 \ldots j_k}}$$

Es wird dann die Entwicklung der Determinante dargestellt durch

(a) $$\sum \pm \Delta_{\substack{i_1 \ldots i_k \\ j_1 \ldots j_k}} \cdot \Delta_{\substack{i_{k+1} \ldots i_n \\ j_{k+1} \ldots j_n}}$$

wo $(i_1 \ldots i_n)$, $(j_1 \ldots j_n)$ zwei Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots n$ bedeuten.

Wir betrachten nun eine Determinante Δ von der Ordnung $(n+m)$, die als ersten Hauptminor die bisher besprochene Determinante n-ter Ordnung enthalte. Nach der obigen Bezeichnungsweise wird das Symbol

$$\Delta_{\substack{n+1, \ldots n+m \\ n+1, \ldots n+m}}$$

zur Darstellung der letzteren dienen.

Für unsere neue Determinante Δ wollen wir einen Summenausdruck, entsprechend dem unter (a) soeben niedergeschriebenen, aufstellen, wobei jedoch gegenwärtig die Symbole

$$\Delta_{\substack{i_1 \ldots i_k \\ j_1 \ldots j_k}}$$

die Minoren der neuen Determinante bezeichnen und daher die alten Minoren sind, wenn man dort m Zeilen und m Spalten hinzufügt.

Nun ist die Frage, was für einen Werth dann jene Summation annehmen werde?

Netto erweist die Richtigkeit der folgenden Aussagen:

Der Werth jener Summation ist schlechthin gleich der Determinante von der Ordnung $(n+m)$, multipliziert in die erste Potenz der Determinante m-ter Ordnung, die mit den m hinzugefügten Zeilen und Spalten gebildet ist, nämlich des Minors

$$\Delta_{\substack{1, 2, \ldots n \\ 1, 2, \ldots n}}$$

Wenn man aber, anstatt mit der Formel (a) zu beginnen, eine allgemeinere Formel der Zerlegung (Siehe § 9) zum Ausgangspunkt nimmt, nämlich die Summation von Produkten von k Minoren, die beziehungsweise in

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

Zeilen und Spalten ausgewählt sind, dann stellt sich das Produkt von Δ in die Potenz $(k-1)$ von

$$\Delta_{\substack{1, 2, \ldots n \\ 1, 2, \ldots n}}$$

als Ergebniss heraus.

Netto lässt diesen Lehrsatz (a. a. O. S. 351) zur Beweisführung bei jenem Hauptsatze Sylvesters dienen, den wir schon besprochen haben, nämlich den Satz bezüglich der Minorensysteme von der Art des D_{λ_m}. (Siehe § 23.)

Die beiden hier ausgesprochenen Sätze (der erstere ist als besonderer Fall im zweiten enthalten) finden sich auch in dem einleitenden Abschnitt der Schrift von Reiss: Beiträge zur Theorie der Determinanten (dort als 5. Satz S. 13 und 6. Satz S. 14) und dienen daselbst gleicherweise zur Ableitung der Sylvesterschen Sätze.

Wir haben die Absicht, den vorliegenden Lehrsatz auf eine leichtere Art, als es durch Netto geschehen ist, nachzuweisen, und indem wir uns genau derselben Grundsätze bedienen, die für den angeführten Satz Sylvesters gebraucht wurden. Neben jenem werden wir noch einen andern Lehrsatz finden, der als mit ihm eng zusammengehörig betrachtet werden kann.

Wir wollen zunächst einen Hilfssatz vorausschicken.

Eine gegebene Determinante A von der Ordnung n kann bekanntlich als algebraische Summe der Produkte von k Minoren entwickelt werden, deren erster in der Matrix der ersten m_1 Zeilen, der zweite in der der folgenden m_2 Zeilen und so fort enthalten ist, wobei

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n.$$

Bezeichnet man also solche Minoren mit Δ, so ergiebt sich:

$$\sum \pm \Delta_{m_1} \Delta_{m_2} \ldots \Delta_{m_k} = A$$

und man weiss, in welcher Art hier die Ausdehnung der Summierung verstanden werden muss.

Wir stellen uns nun folgende Aufgabe.

In dem vorangehenden Summenausdruck setzen wir an Stelle eines jeden Δ dessen Komplement und fragen: Welches wird dann der Werth der Summation? Wir werden nachweisen, dass dieser Werth die Potenz $(k - 1)$ von A sein wird.

Für $k = 2$ erhält man also A selbst wieder, ein selbstverständliches Ergebniss, da ja dann, wie man leicht erkennt, die verschiedenen Glieder der Summierung ungeändert bleiben und nur die beiden Faktoren jedesmal mit einander vertauscht werden.

Wir wollen die reziproke Determinante zu A bilden und diese A' nennen. In A' heben wir die zu den Δ_i homologen Minoren hervor und entwickeln daher A' nach der Formel

$$\sum \pm \Delta'_{m_1} \Delta'_{m_2} \ldots \Delta'_{m_k} = A'$$

Wir wissen aber, dass $A' = A^{n-1}$ und dass überdies ein jedes Δ'_m dem mit A^{m-1} multiplizierten Komplemente des zu Δ'_m homologen Minors, also des Δ_m gleichkommt. Gedachtes Komplement ist nun aber Δ_{n-m}. Also können wir schreiben:

$$A^{m_1+m_2+\cdots+m_k-k} \sum \pm \Delta_{n-m_1} \Delta_{n-m_2} \cdots \Delta_{n-m_k} = A^{n-1}$$

und daraus folgt, weil

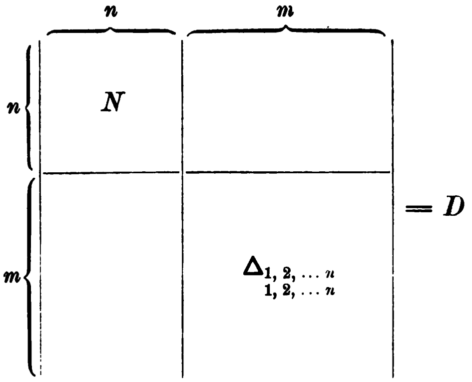
$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$$

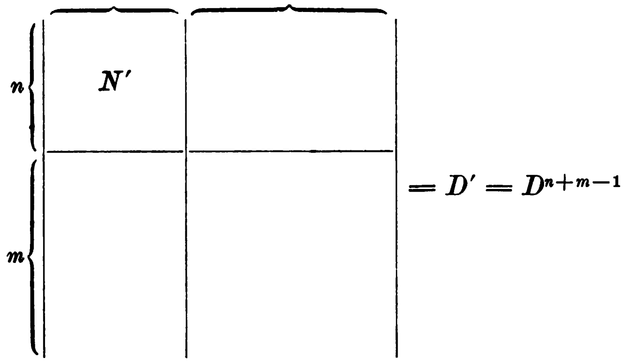
diese Gleichung:

$$\sum \pm \Delta_{n-m_1} \Delta_{n-m_2} \cdots \Delta_{n-m_k} = A^{k-1}$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Wir betrachten nun eine Determinante der Ordnung $(n + m)$ und die ihr zugehörige reziproke Determinante und werden beide im schematischen Bilde, wie folgt, zur Anschauung bringen.





Wir wollen die Entwicklung von N nach Produkten von k Minoren der Ordnungen $m_1, m_2, \ldots m_k$ ausführen und diese Minoren mit der vorher angewandten Bezeichnung kenntlich machen. So ergiebt sich:

$$\sum \pm \varDelta_{m_1} \varDelta_{m_2} \ldots \varDelta_{m_k}$$

wobei

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$$

und wo $\varDelta_{m_1}$ denjenigen Minor darstellen mag, den man in N entstehen lässt durch Unterdrückung der Zeilen mit Ordnungszahlen:

$$i_1' \; i_2' \cdots i_{n-m_1}'$$

und der Spalten mit Ordnungszahlen:

$$j_1' \; j_2' \cdots j_{n-m_1}'$$

Ähnliches gilt für $\varDelta_{m_2} \ldots \varDelta_{m_k}$.

Verstehen wir nun unter $\Delta_{m_1}, \ldots$ Minoren, die man bei Tilgung der angegebenen Zeilen und Spalten erhält, jedoch nicht von der Determinante N, wohl aber von der Gesammtdeterminante D, dann wird Δ_{m_1} die Ordnung $(m + m_1)$ annehmen und dem entsprechend die andern Minoren.

Wir multiplizieren jetzt den Summenausdruck mit

$$D^{n-m_1-1} \,.\, D^{n-m_2-1} \ldots D^{n-m_k-1}$$

und beachten, dass nach dem Lehrsatze über die Minoren der reziproken Determinanten das Produkt

$$\Delta_{m_1} D^{n-m_1-1}$$

nichts andres ist, als das Komplement des zu Δ_{m_1} homologen Minors in D', nämlich $\varDelta'_{n-m_1}$ und ein Minor von N' ist. Wenn wir auf einen Augenblick in Δ_{m_1} die letzten m Zeilen und m Spalten ausscheiden, so wird es wieder der Minor von N und $\varDelta'_{n-m_1}$ ist dann eben das Komplement seines homologen Minors in N'.

Also ist der ganze Summenausdruck, nach Ausführung des angedeuteten Produktes, genau derselbe, wie man ihn erhalten haben würde, wenn man die Entwicklung von N' als Summe von Produkten der k Minoren hergestellt und dann in dieser Summe an Stelle eines jeden Minors sein Komplement innerhalb N' eingesetzt hätte.

Nach dem oben bewiesenen Hilfssatze wird also das Ergebniss sein:

$$N'^{k-1}$$

Nun ist zufolge des oft angeführten Satzes von den Minoren der Reziproken:

$$N' = D^{n-1} \cdot \Delta_{\substack{1,2,\dots n\\1,2,\dots n}}$$

also ergiebt sich:

$$D^{n-m_1-1} \cdot D^{n-m_2-1} \dots D^{n-m_k-1} \left(\sum \pm \Delta_{m_1} \Delta_{m_2} \dots \Delta_{m_k}\right) =$$
$$= D^{(n-1)(k-1)} \cdot \Delta^{k-1}_{\substack{1,2,\dots n\\1,2,\dots n}}$$

und hieraus ohne Weiteres (weil $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$)

$$\sum \pm \Delta_{m_1} \dots \Delta_{m_k} = D \cdot \Delta^{k-1}_{\substack{1,2,\dots n\\1,2,\dots n}}$$

Damit erscheint der angeführte Lehrsatz Nettos bewiesen.

Wir können jedoch daraus sogleich noch einen weiteren gleichartigen Satz herleiten.

Zu der gegebenen Determinante N werden wir zunächst die Summation bilden, die ihrer Entwicklung entspricht, werden dann an Stelle eines jeden Minors sein Komplement setzen und gelangen auf diese Weise zu dem Summenausdruck:

$$\sum \pm \varDelta_{n-m_1} \dots \varDelta_{n-m_k}$$

Nun wollen wir, wie früher, die $\varDelta$ in diesem Ausdrucke dergestalt umdeuten, dass mit ihnen, den Minoren von N, die letzten m Zeilen und m Spalten von D verbunden werden; demnach werden aus den $\varDelta$ Minoren von D, und zwar von den Ordnungen:

$$n + m - m_1, \quad n + m - m_2, \quad \dots$$

Der Unterschied zwischen dieser neuen Summe und der im Lehrsatze von Netto behandelten besteht darin, dass während die Faktoren jedes Gliedes bei der Nettoschen Formel nicht irgend ein Element von N mit einander gemein haben oder, wie wir sagen wollen, nicht in N, sondern nur ausserhalb von N mit einander verflochten sind, hier im Gegentheil die Minoren, welche die Faktoren eines und desselben Gliedes darstellen, innerhalb von N und ausserhalb von N in Verflechtung stehen.

Mittelst eines dem früheren entsprechenden Verfahrens können wir diesen neuen Summenausdruck berechnen. Es genügt, ihn zu multiplizieren mit

$$D^{m_1-1} \cdot D^{m_2-1} \dots D^{m_k-1}$$

und zu beachten, dass

$$\Delta_{n-m_1} D^{m_1-1}$$

gerade den Minor von D' darstellt, der zu dem Komplement von Δ_{n-m_1} homolog ist, also den zu $\varDelta_{m_1}$ homologen Minor oder auch,

was damit gleichkommt, den Minor von N', der homolog ist zu dem Minor Δ_{m_1} in N.

Es wird daher die Summe in ihrer jetzigen Fassung eben nichts andres vorstellen, als die Entwicklung von N' nach Produkten von k Minoren und hiernach ergiebt sich mit Benutzung des bekannten Werthes von N':

$$\sum \pm \Delta_{n-m_1} \ldots \Delta_{n-m_k} = D^{k-1} \cdot \Delta_{1,2,\ldots n}^{1,2,\ldots n}$$

Also in Worten:

Es sei eine Determinante von der Ordnung $(n+m)$ vorgelegt und ihr erster Hauptminor der Ordnung n. Wenn man in der Entwicklungsformel dieser Determinante n-ter Ordnung, nach den Produkten von k Minoren, jeden Minor durch sein Komplement ersetzt und für dieses wiederum den Minor aus der Determinante der Ordnung $(n+m)$ einsetzt, den man dadurch erhält, dass man Zeilen und Spalten derselben Ordnungszahlen unterdrückt, wie man sie auszuscheiden nöthig hatte, um das gedachte Komplement zu gewinnen, so erscheint als Ergebniss die Potenz $(k-1)$ der gesammten Determinante der Ordnung $(n+m)$, multipliziert mit der Determinante, die durch die Schnittstellen der letzten m Zeilen und m Spalten gegeben ist. (Pascal.)

Bezüglich der Betrachtungen dieses Paragraphen hat man zu vergleichen

Pascal, Su di un teorema del Sig. Netto relativo ai determinanti, e su di un altro teorema ad esso affine. Acc. Linc. Rendic. 1896 ser. 5. vol. 5. 1° sem. [188—191].

Der Zusammenhang der von uns mitgetheilten beiden Lehrsätze unter sich und mit dem Laplaceschen Zerlegungssatze (Siehe S. 37 f.) bestätigt sich überdies in einfacher Weise, wenn man ein allgemeines Verfahren zur Umwandlung von Determinantensätzen befolgt, das Muir in zweifacher Richtung unter dem Namen des law of complementaries und des law of extensible minors dargestellt hat.

Muir, The law of extensible minors in determinants. Edinburgh Trans. vol. 30. part. I (1880—81) [1—4].

§ 26. Lehrsatz von Scholtz (Hunyady).

Es erscheint angemessen, den vorher erörterten Lehrsätzen noch den folgenden hinzuzufügen, den wir den Lehrsatz von Scholtz nennen wollen, weil er sich zuerst in einer geometrischen Arbeit dieses Verfassers vorfindet. Kurze Zeit danach ist er von Hunyady ausge-

sprochen und zu dem gleichen Zwecke verwerthet worden. Man vergleiche

Scholtz, Die auf dem Kegelschnitt liegenden sechs Punkte und der Satz des Hexagrammum mysticum. (Magyarisch.) Müegyetemi Lapok (Polytechnische Blätter) Bd. 2 (1877) S. 65 ff.

Scholtz, Sechs Punkte eines Kegelschnittes. Arch. d. Math. 62. Th. (1878) [317—324] S. 319 f.

Hunyady, Zur Theorie der Flächen zweiter Ordnung. (Magyarisch.) Budapest Értek. Bd. 7 (1880) Nr. 5.

Hunyady, Die Bestimmung der Kurven und Flächen zweiter Ordnung. (Magyarisch.) Budapest Értek. Bd. 7 (1880) Nr. 18 [1—39].

Hunyady, Beitrag zur Theorie der Flächen zweiten Grades. Journ. f. Math. Bd. 89 (1880) [47—69] S. 58.

Von diesem Lehrsatze handeln dann auch:

Igel, Zur Theorie der Determinanten. Monatsh. f. Math. 3. Jahrg. 1892 [55—67].

Escherich, Über einige Determinanten. Monatsh. f. Math. 3. Jahrg. 1892 [68—80].

Es sei eine Determinante n-ter Ordnung mit den Elementen a_{rs} gegeben.

Wir bilden n lineare Funktionen mit ebenso vielen Unbekannten, die zu Koeffizienten der Reihe nach die Elemente der verschiedenen Zeilen besitzen.

Wir stellen also auf:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \quad \cdot \qquad\quad \cdot \qquad \cdots \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{array}$$

und danach bilden wir zu diesen Ausdrücken alle ihre Quadrate und die Produkte zu je zweien. Nun stellen wir eine Determinante auf, die zu Elementen der ersten n Zeilen die Koeffizienten der n Quadrate und zu Elementen der folgenden Zeilen die Koeffizienten der übrigen $\frac{1}{2}n(n-1)$ Produkte zu je zweien enthält, natürlich in der Weise geordnet, dass in derselben Spalte aus Quadraten und aus Produkten die Koeffizienten der nämlichen Grössen erscheinen.

Man erhält auf diese Weise eine Determinante von der Ordnung

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

die bisher als Determinante Hunyadys benannt worden ist.

Für $n = 2$ ergiebt sich zum Beispiel die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 & 2a_{11}a_{12} \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & 2a_{21}a_{22} \\ a_{11}a_{21} & a_{12}a_{22} & a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} \end{vmatrix}$$

Nun sagt der Lehrsatz, auf den wir anspielten, aus:

Der Werth der so gebildeten Determinante ist gleich der $(n+1)$-ten Potenz der gegebenen Determinante.

Diesen Satz werden wir auf demselben Wege beweisen, den Scholtz und Hunyady an den angeführten Stellen eingeschlagen haben.

Setzen wir beispielsweise den Fall $n = 3$ voraus, dann wird die gedachte Determinante

$$H = \begin{vmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & 2a_{11}a_{12} & 2a_{11}a_{13} & 2a_{12}a_{13} \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & a_{23}^2 & 2a_{21}a_{22} & 2a_{21}a_{23} & 2a_{22}a_{23} \\ a_{31}^2 & a_{32}^2 & a_{33}^2 & 2a_{31}a_{32} & 2a_{31}a_{33} & 2a_{32}a_{33} \\ a_{11}a_{21}, & a_{12}a_{22}, & a_{13}a_{23}, & a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21}, & a_{11}a_{23}+a_{13}a_{21}, & a_{12}a_{23}+a_{13}a_{22} \\ a_{11}a_{31}, & a_{12}a_{32}, & a_{13}a_{33}, & a_{11}a_{32}+a_{12}a_{31}, & a_{11}a_{33}+a_{13}a_{31}, & a_{12}a_{33}+a_{13}a_{32} \\ a_{21}a_{31}, & a_{22}a_{32}, & a_{23}a_{33}, & a_{21}a_{32}+a_{22}a_{31}, & a_{21}a_{33}+a_{23}a_{31}, & a_{22}a_{33}+a_{23}a_{32} \end{vmatrix}$$

Wir bezeichnen nun mit A_{rs} das algebraische Komplement von a_{rs} in der vorgelegten Determinante dritter Ordnung D.

Wir wollen dann hier zur ersten Zeile, nachdem wir sie mit A_{11} multipliziert, die vierte Zeile hinzufügen, multipliziert mit A_{21} und die fünfte, desgleichen mit A_{31} verbunden, sodann zur zweiten Zeile, die vorher mit A_{21} multipliziert wird, die vierte, multipliziert mit A_{11} und die sechste, desgleichen mit A_{31} verbunden, und addieren endlich zur dritten, mit A_{31} multiplizierten Zeile, die fünfte und die sechste, beziehungsweise mit A_{11} und A_{21} multipliziert.

Danach werden die ersten drei Zeilen:

$$\begin{matrix} a_{11}D, & 0, & 0, & a_{12}D, & a_{13}D, & 0 \\ a_{21}D, & 0, & 0, & a_{22}D, & a_{23}D, & 0 \\ a_{31}D, & 0, & 0, & a_{32}D, & a_{33}D, & 0 \end{matrix}$$

und mithin findet sich, wenn die Determinante nach Produkten entwickelt wird, in denen die den ersten drei Zeilen angehörenden Minoren mit ihren Komplementen verbunden sind,

$$D^4 \cdot \begin{vmatrix} a_{12}a_{22} & a_{13}a_{23} & a_{12}a_{23}+a_{13}a_{22} \\ a_{12}a_{32} & a_{13}a_{33} & a_{12}a_{33}+a_{13}a_{32} \\ a_{22}a_{32} & a_{23}a_{33} & a_{22}a_{33}+a_{23}a_{32} \end{vmatrix}$$

Diesem Ausdrucke gleich ergiebt sich also das Produkt der Determinante von Hunyady in die drei algebraischen Komplemente A_{11}, A_{21}, A_{31}.

Man würde zu zeigen vermögen, dass das Produkt dieser drei algebraischen Komplemente genau gleich ist der zuletzt geschriebenen Determinante 3-ter Ordnung, doch auch ohne zu dieser neuen Beweisführung überzugehn, bemerken wir, dass das Produkt $A_{11} . A_{21} . A_{31}$ nicht D als Faktor enthalten kann, weil ja keines der A in Faktoren zerlegt werden kann und desgleichen D selbst unzerlegbar ist. Also kann der Faktor D^4, der sich in dem letzteren Ausdrucke findet, nur ein Faktor der Determinante H Hunyadys sein und wenn wir dann vergleichsweise den Grad eines Gliedes dieser Determinante und eines Gliedes von D^4 prüfen, so findet sich, dafs nur

$$H = cD^4$$

sein kann. Hier bedeutet c eine Konstante, deren Werth man übrigens zu 1 bestimmt, indem man im Besondern annimmt, es verschwänden alle Elemente von D, mit einziger Ausnahme der Elemente der Hauptdiagonale.

Man überzeugt sich leicht davon, dass dies Verfahren der Beweisführung sich auch im Allgemeinen durchführen lässt, mithin ganz uneingeschränkt

$$H = D^{n+1}$$

wird.

In Betreff solcher Determinanten, die zunächst in der Lehre von den Kegelschnitten auftreten, kann man neben den oben schon angeführten noch folgende Arbeiten einsehen:

Hunyady, Über die verschiedenen Formen der Bedingungsgleichung, welche ausdrückt, dafs sechs Punkte auf einem Kegelschnitt liegen. Journ. f. Math. Bd. 83 (1877) [76—85]. Ein Zusatz des Verfassers im Journ. f. Math. Bd. 92 (1882) [307—310].

Unter dem gleichen Titel finden sich zwei Aufsätze von Hunyady in magyarischer Sprache: Budapest Értek. Bd. 4 (1875) Nr. 6 [1—23] und Budapest Értek. Bd. 5 (1877) Nr. 4 [1—20], der letztere als Fortsetzung des ersten.

Mertens, Sätze über Determinanten und Anwendung derselben zum Beweise der Sätze von Pascal und Brianchon. Journ. f. Math. Bd. 84 (1878) [355—359].

Pasch, Über gewisse Determinanten, welche in der Lehre von den Kegelschnitten vorkommen. Journ. f. Math. Bd. 89 (1880) [247—251].

Hunyady, Über eine Fläche vierter Ordnung. (Magyarisch.) Budapest Értek. Bd. 8 (1881) Nr. 12 [1—20].

Hunyady, Über den geometrischen Ort der Kegelspitzen der durch sechs Punkte gehenden Kegelflächen zweiten Grades. Journ. f. Math. Bd. 92 (1882) [304—306].

Caspary, Über die Umformung gewisser Determinanten, welche in der Lehre von den Kegelschnitten vorkommen. Journ. f. Math. Bd. 92 (1882) [123—144].

Müller, E., Anwendung der Grassmannschen Methoden auf die Theorie der Curven und Flächen zweiten Grades. Journ. f. Math. Bd. 115 (1895) [234—253] § 2. S. 239 f.

§ 27. 28. Determinanten, deren Elemente aus den Elementen zweier gegebener Determinanten gebildet sind.

§ 27. Kroneckers Lehrsatz.

An die im vorausgehenden Paragraphen durchgeführten Überlegungen mag hier eine Erörterung der Determinanten sich anschliessen, deren Elemente aus den Elementen zweier vorgelegter Determinanten zu bilden sind.

Von diesem Gegenstande findet man vielfältige Lehrsätze in verschiedenen Arbeiten. Wir verweisen auf:

Sylvester, On a certain fundamental theorem of determinants. Phil. Mag. ser. 4 vol. 2 (1851) [142—145].

Sylvester, On Staudts theorems concerning the contents of polygons and polyhedrons, with a note on a new and resembling class of theorems. Phil. Mag. ser. 4. vol. 4 (1852) [335—345]

Im Anhang dieses Aufsatzes macht der Verfasser auf geometrische Anwendungen seines im Jahre 1851 veröffentlichten Lehrsatzes aufmerksam.

Kronecker, Bemerkungen zur Determinanten-Theorie. (Auszug aus Briefen an Herrn Baltzer.) Journ. f. Math. Bd. 72 (1870) [152—175] S. 152 f. — Wieder abgedruckt in Kronecker, Werke Bd. 1. Leipzig 1895. [237—269].

Siacci, Teorema sui determinanti ed alcune sue applicazioni. Acc. di Tor. Atti vol. 7 (1871—72) [772—783].

Siacci, Intorno ad alcune trasformazioni di determinanti. Ann. di mat. ser. 2 t. 5 (1871—73) [296—304].

Picquet, Analyse combinatoire des déterminants. C. R. t. 86 (1878) [1118. 1119].

Picquet, a. a. O. (Siehe oben Ende von § 15 und Anfang von § 22) Journ. de l'éc. pol. cah. 45 t. 28 (1878) [201—243] S. 214 f., 216—218, 234—241.

Hunyady, Sätze über eine besondere Gattung komponierter Determinanten. (Magyarisch.) Budapest Értek. Bd. 7 (1880) Nr. 21 [1—15].

Hensel, Über die Darstellung der Determinanten eines Systems, welches aus zwei andern componirt ist. Acta math. Bd. 14 (1890—91) [317—319].

Ferner die oben S. 104 angeführten beiden Aufsätze von Igel und Escherich aus dem Jahre 1892 und

Netto, Act. math. Bd. 17 (1893) S. 200 in dem schon S. 84 berührten Aufsatze.

Frobenius, a. a. O. (Siehe Literaturverzeichniss S. 85.) Journ. f. Math. Bd. 114 (1895) [187—230], dort wird S. 190 der Kroneckersche Satz auf den Sonderfall des Sylvesterschen (Siehe oben S. 94) zurückgeführt.

Ein besonders eleganter Satz aus diesem Lehrgebiet ist der folgende, sogenannte Lehrsatz Kroneckers.

Sind die beiden Determinanten gegeben:

A von der Ordnung n, in den Elementen a_{ij} und

B von der Ordnung m, in den Elementen b_{hk}

und bilden wir alle Produkte

$$c_{pq} = a_{ij} b_{hk},$$

an Zahl $n^2 m^2$ und mit diesen Elementen $(a_{ij} b_{hk})$ die Determinante der Ordnung (nm), indem wir auf dieselbe Zeile alle

die stellen, bei denen die Indices (i, h) dieselben sind, und auf dieselbe Spalte alle Elemente mit den gleichen zweiten Indices (j, k) bringen, so wird die Determinante C aus den c dann gleich sein

$$A^m . B^n.$$

Ein leichter Nachweis dieses Lehrsatzes ist von Netto (a. a. O.) gegeben, der ihn auf die Entwicklung der Determinante begründet. Um das Verständniss des Verfahrens, das man auch für den allgemeinen Fall anwenden kann, zu erleichtern, wollen wir im Besondern $n = 3$, $m = 2$ voraussetzen.

Dann wird die Determinante C die folgende:

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}, & a_{11}b_{12}, & a_{12}b_{11}, & a_{12}b_{12}, & a_{13}b_{11}, & a_{13}b_{12} \\ a_{11}b_{21}, & a_{11}b_{22}, & a_{12}b_{21}, & a_{12}b_{22}, & a_{13}b_{21}, & a_{13}b_{22} \\ a_{21}b_{11}, & a_{21}b_{12}, & a_{22}b_{11}, & a_{22}b_{12}, & a_{23}b_{11}, & a_{23}b_{12} \\ a_{21}b_{21}, & a_{21}b_{22}, & a_{22}b_{21}, & a_{22}b_{22}, & a_{23}b_{21}, & a_{23}b_{22} \\ a_{31}b_{11}, & a_{31}b_{12}, & a_{32}b_{11}, & a_{32}b_{12}, & a_{33}b_{11}, & a_{33}b_{12} \\ a_{31}b_{21}, & a_{31}b_{22}, & a_{32}b_{21}, & a_{32}b_{22}, & a_{33}b_{21}, & a_{33}b_{22} \end{vmatrix}$$

Nun wollen wir unter den Zeilen dieser Determinante drei Systeme von je zwei Zeilen unterscheiden (im Allgemeinen n Systeme von je m Zeilen), indem wir in demselben System diejenigen Zeilen begreifen, deren Elemente, soweit sie auf ein und derselben Spalte stehen, den gleichen Faktor a_{ij} enthalten. Es wird dann ein Minor, der innerhalb der Matrix der beiden ersten Zeilen ausgewählt ist, stets das Produkt zweier a zum Faktor haben und der andere Faktor wird entweder Null sein oder die Determinante der b. Dasselbe trifft zu für einen Minor, der innerhalb der Matrix der dritten und vierten Zeile herausgehoben wird und für einen solchen aus der Matrix der 5-ten und 6-ten Zeile.

Zerlegen wir die Determinante in eine Summe von Produkten der Minoren, die innerhalb der zwei ersten Zeilen, der 3-ten und 4-ten und der 5-ten und 6-ten vorkommen, so wird jedes Glied mithin entweder Null oder es enthält als Faktor die Determinante der b, zur dritten Potenz erhoben (im Allgemeinen B^n). Daraus ziehen wir die Folgerung, dass in C der Faktor B^n enthalten ist. Mit Rücksicht auf die Symmetrie zwischen den a und den b schliessen wir, dass C gleicherweise auch A^m zum Faktor haben muss. Mithin ergiebt sich:

$$C = s . A^m . B^n.$$

Wenn wir hier den Grad von C bezüglich der a oder b prüfen, so leuchtet unmittelbar ein, dass s nur eine Konstante sein kann und nicht mehr von den Elementen a, b abhängen darf. Nehmen wir weiter an, dass alle a_{ij}, bei denen die Indices (i, j) verschiedene sind, verschwinden und desgleichen alle b_{hk} mit verschiedenen Indices (h, k), so folgt ohne Weiteres $s = 1$; und daher wird schliesslich

$$C = A^m . B^n$$

Wegen anderer Beweise für denselben Lehrsatz kann man einsehen:
Hensel und Escherich (a. a. O.) und
Rados, Zur Theorie der Determinanten. Math. Ber. aus Ung. 8. Bd. (1891) [60—64]. Hier kommt Grassmanns Methode zur Anwendung.
Igel, a. a. O. Monatsh. f. Math. 1892 weist für den besonderen Fall, wo A und B Determinanten gleicher Ordnung und auch ihre homologen Elemente gleich sind, die Hunyadysche Determinante als Theiler der Kroneckerschen nach.

§ 28. Lehrsätze von Picquet, von Sylvester und Anderen.

Wir gehen jetzt zu einem andern Lehrsatze, der von Picquet nachgewiesen ist, über. (Siehe S. 214 der im Journ. de l'éc. pol. enthaltenen Abhandlung.)

Es mögen zwei Determinanten A und B von der Ordnung n vorgelegt sein. In einer von beiden, zum Beispiel in A wollen wir an Stelle von m Spalten, die auf jede nur irgend mögliche Weise ausgewählt sein sollen, m Spalten aus B einsetzen.

Jedes Mal erhalten wir dann eine Determinante von der Ordnung n und im Ganzen ergeben sich deren $(n)^2_m$, genau soviel, als das Quadrat der Binomialzahl $(n)_m$ angiebt. Die Determinante D_m nun, die wir aus ihnen bilden können, indem wir in derselben Zeile alle Determinanten vereinigen, die bei Ausscheidung der nämlichen m Spalten von A entstanden, und in derselben Spalte alle die Determinanten, welche nach Unterdrückung von je m auf jede mögliche Weise ausgewählten Spalten von A der Überführung der nämlichen m Spalten von B in die frei gewordenen Plätze ihr Entstehen verdanken, die so gebildete Determinante D_m ist gleich

$$A^{\binom{n-1}{m}} . B^{\binom{n-1}{m-1}}$$

Aus diesem Lehrsatze lässt sich in einem besonderen Falle seiner Anwendung der nach Sylvester benannte Satz herleiten, den wir in

einem vorausgehenden Paragraphen (Siehe § 23) nachgewiesen haben. Es ist dies durch die Ausführungen Picquets auf Seite 216—218 seiner oben angeführten Arbeit ersichtlich geworden.

Der Beweis des Picquetschen Lehrsatzes ist nun einfach.

Jedes Element von D_m ist eine Determinante, die $(n - m)$ Spalten aus A und m Spalten aus B enthält. Eine solche Determinante kann man entwickeln als algebraische Summe von Produkten, worin Minoren der Ordnung $(n - m)$ von A mit Minoren der Ordnung m von B multipliziert auftreten. Es wird dann zum Beispiel jedes Element der ersten Zeile von D_m einzeln sich darstellen als Summe von Produkten, die dieselben Minoren der Ordnung $(n - m)$ von A in die $(n)_m$ Systeme von Minoren m-ter Ordnung aus B multipliziert enthalten, jedes solche System bestehend gedacht aus allen den $(n)_m$ Minoren, die in denselben m Spalten, wie in einer Matrix, eingeschlossen sind.

Auf diese Weise erkennt man, dass D_m als Produkt zweier Determinanten erscheint, von denen die eine die Minoren der Ordnung $(n - m)$ von A zu Elementen hat und die andere die Minoren m-ter Ordnung von B, wenn man Sorge trägt, bei einer von ihnen das Zeichen derjenigen Elemente zu ändern, welche Minoren ungerader Klasse entsprechen (was ja bekanntlich den Werth der Determinante ungeändert lässt).

Wir wissen aber (Siehe § 22), dass die Determinante A_{n-m}, die die Minoren der Ordnung $(n - m)$ von A zu Elementen hat, den Werth

$$A^{\binom{n-1}{m}}$$

besitzt und dass der mit den Minoren m-ter Ordnung von B gebildeten Determinante, also B_m der Werth

$$B^{\binom{n-1}{m-1}}$$

zukommt. Damit ist also unser Lehrsatz bewiesen.

Im Zusammenhang mit der Determinante D_m kann man die Determinante D_{n-m} betrachten, die man auch bei Vertauschung von A und B in dem Eingangs des Paragraphen dargestellten Verfahren erhält, das heisst, indem man an Stelle von m auf jede mögliche Weise in B ausgewählten Spalten m Spalten von A einsetzt.

Man gewinnt daher:

$$D_{n-m} = A^{\binom{n-1}{m-1}} . B^{\binom{n-1}{m}}$$

Das Produkt der beiden D_m und D_{n-m} wird sein

$$A^{\binom{n}{m}} . B^{\binom{n}{m}}$$

Ordnen wir die Elemente der beiden Determinanten D_m, D_{n-m} auf passende Weise, nämlich so, dass homologe Elemente in ihnen stets zwei Determinanten entsprechen, von denen die eine $(n - m)$ Spalten von A und m Spalten von B, die andere die übrigbleibenden m Spalten von A und die übrigbleibenden $(n - m)$ von B enthält. Dann lässt sich das folgende Verhalten aufzeigen:

Wenn man mit den beiden Determinanten D_m und D_{n-m} ihr Produkt nach Zeilen bildet, so werden die Hauptelemente des Produktes gleich dem Produkte $A.B$ und die andern Elemente werden Null.

Dies bildet den Inhalt eines Lehrsatzes von Sylvester, der von ihm schon im Jahre 1851 (in der im Anfang des § 27 angeführten Arbeit S. 143) veröffentlicht worden ist.

Wir wollen eine Matrix herstellen, die als erste Spalten $(n - m)$ Spalten von A enthält und als weitere Spalten alle die B zugehörigen und so auch eine zweite Matrix, die an erster Stelle die übrigbleibenden m Spalten aus A und im Anschluss daran alle Spalten von B in sich begreift.

Wir bilden alle Determinanten n-ter Ordnung, die innerhalb der ersten Matrix liegen und stets die festen Spalten von A einschliessen, und verfahren desgleichen mit Bezug auf die zweite Matrix. Es gelingt dann, jene ersteren Determinanten mit diesen letzteren paarweise und eindeutig in Zusammenhang zu bringen, indem wir diejenigen als auf einander bezogen (korrespondierend) betrachten, die nicht eine einzige Spalte von B gemeinsam haben. Dann werden die homologen Elemente zweier homologen Zeilen in D_m und D_{n-m} zu korrespondierenden Determinanten. Die Summe der Produkte solcher Paare wird (wenn man den Determinanten aus der zweiten Matrix das negative Zeichen giebt, im Fall sie ungerader Klasse angehören) ein Hauptelement der Produktdeterminante $D_m . D_{n-m}$ sein.

Nennen wir $\alpha_1 \alpha_2 \ldots$ die Minoren von der Ordnung $(n - m)$, enthalten in den $(n - m)$ Spalten von A und $\alpha_1' \alpha_2' \ldots$ ihre algebraischen Komplemente; es sind dies die Minoren m-ter Ordnung, die in den andern Spalten vorkommen (und negativen Zeichens, wenn zur ungeraden Klasse gehörig).

Bezeichnen wir weiter mit

$$\begin{matrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \end{matrix}$$

die Minoren der Ordnung m, die in B enthalten sind, und mit

$$\begin{matrix} \beta'_{11} & \beta'_{12} & \dots \\ \beta'_{21} & \beta'_{22} & \dots \\ . & . & \dots \end{matrix}$$

deren algebraische Komplemente von $(n-m)$-ter Ordnung.

Danach wird das Hauptelement des Produktes $D_m . D_{n-m}$ sich darstellen in der Form:

$$\sum_j \left(\sum_i \alpha_i \beta_{ji} \sum_k \alpha'_k \beta'_{jk} \right) = \sum_{ik} \alpha_i \alpha'_k \sum_j \beta_{ji} \beta'_{jk}$$

Für $i = k$ erhält man:

$$\sum_i \alpha_i \alpha'_i \sum_j \beta_{ji} \beta'_{ji}$$

was dem Produkte $A . B$ gleichkommt und für $i \gtrless k$ ergiebt sich der Werth Null, da ja nach einer bekannten Determinanteneigenschaft

$$\sum_j \beta_{ji} \beta'_{jk} = 0$$

wenn $i \gtrless k$. (Siehe S. 19.)

Dem entsprechend würde man nachweisen, dass die nicht auf der Hauptdiagonale befindlichen Elemente Null sind.

Die beiden hier betrachteten Determinanten D_m und D_{n-m} haben zu einander ähnliche Beziehungen, wie zwei Determinanten, von denen die eine aus den Minoren der Ordnung m, die andere aus denen der Ordnung $(n-m)$, die zu ein und derselben vorgelegten Determinante gehören, gebildet sind.

Die Ähnlichkeit erstreckt sich noch bis auf die Beziehungen zwischen ihren Minoren. Man kann da den folgenden Lehrsatz (von Picquet, a. a. O. Journ. de l'éc. pol. S. 238 ff.) nachweisen:

Ein Minor von D_m ist gleich dem algebraischen Komplemente des zu ihm homologen Minor in D_{n-m}, multipliziert mit einer Potenz von A und einer Potenz von B.

Den Beweis dieses Lehrsatzes können wir auf folgende, höchst einfache Weise durchführen.

Es möge bezeichnen d_{ij} die Elemente von D_m und d'_{ij} die von D_{n-m}.

Wir betrachten, um bestimmte Vorstellungen zu erwecken, den ersten Hauptminor von r-ter Ordnung in D_m. Ihn können wir unter Anwendung der Bezeichnung $t = (n)_m$ schreiben:

$$\begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1r} & d_{1,r+1} & \cdots & d_{1t} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ d_{r1} & \cdots & d_{rr} & d_{r,r+1} & \cdots & d_{rt} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Das Produkt dieser Determinante in D_{n-m} wird in Folge des zuletzt bewiesenen Lehrsatzes:

$$\begin{vmatrix} A.B & 0 & \cdots & 0 & d'_{1,r+1} & \cdots & d'_{1t} \\ 0 & A.B & \cdots & 0 & d'_{2,r+1} & \cdots & d'_{2t} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & A.B & d'_{r,r+1} & \cdots & d'_{rt} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d'_{r+1,r+1} & \cdots & d'_{r+1,t} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d'_{t,r+1} & \cdots & d'_{tt} \end{vmatrix}$$

oder

$$\begin{vmatrix} d'_{r+1,r+1} & \cdots & d'_{r+1,t} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ d'_{t,r+1} & \cdots & d'_{tt} \end{vmatrix} A^r . B^r$$

und, da man weiss, dass D_{n-m} seinerseits gleich einer Potenz von A multipliziert mit einer Potenz von B ist, so erscheint der Lehrsatz bewiesen. In der That findet man, dass der Minor r-ter Ordnung von D_m gleich dem algebraischen Komplemente des ihm entsprechenden Minor in D_{n-m} ist, multipliziert mit

$$A^{r-\binom{n-1}{m-1}} . B^{r-\binom{n-1}{m}}$$

Wir wollen zum Schluss dieser Betrachtungen noch anmerken, dass, wenn man im Besonderen die zweite Determinante B in der Gestalt voraussetzt:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

dann die Lehrsätze dieses Paragraphen jene von § 22 in Wiederholung ergeben, und die Determinanten D_m, D_{n-m} unserer jetzigen Erörterung in umgekehrter Folge die aus Minoren der Determinante A von m-ter und $(n - m)$-ter Ordnung dargestellten Determinanten werden, die wir in jenem Paragraphen mit denselben Buchstaben bezeichnet haben.

An die Gruppe von Erwägungen, die sich auf Determinanten beziehen, die mit den Elementen zweier andern hergestellt sind, knüpft auch eine Arbeit von Siacci an, die von uns bereits (S. 107) angeführt wurde.

Siacci, Acc. di Tor. Atti vol. 7 S. 772; Ann. di mat. vol. 5 S. 296.

Sind zwei Determinanten gegeben:

$$A = |a_{rs}|$$
$$B = |b_{rs}|$$

und bildet man die Determinante P, deren allgemeines Element sei

$$\lambda a_{rs} + \mu b_{rs}$$

so sagt der erste der Lehrsätze von Siacci aus:

Die Determinante P ist gleich dem Produkt der beiden Determinanten A, B, multipliziert mit einer Determinante, deren allgemeines Glied sich darstellt als

$$\mu A_{rs} + \lambda B_{rs}$$

wo A_{rs}, B_{rs} die Komplemente der Elemente a_{rs}, b_{rs} in A, B sind.

Wir werden nicht auf Einzelheiten bei diesem und den andern Lehrsätzen eingehen. Es mag genügen, nur einen Hinweis darauf zu geben.

Man lese mit Bezug auf den Gegenstand dieses Paragraphen auch:

Pascal, Sulle varie forme que possono darsi alle relazioni fra i determinanti di una matrice rettangolare. Ann. di mat. ser. 2 t. 24 (1896) [241—253] in § 3 S. 246 ff.

Es werden dort mit Benutzung des Ergebnisses der folgenden Paragraphen 29—31 den hier erörterten Picquetschen Sätzen drei neue hinzugefügt und diese als erweiterte Gestaltungen früherer Lehrsätze erwiesen, des Satzes von Minoren der reziproken Determinante (S. 33 f.) und der Sätze aus § 23 von Sylvester und D'Ovidio.

Man vergleiche zu dem Inhalte unserer §§ 22, 23, 28 Scott, Det. 1880. chap. 5 [55—66].

§ 29—31. Beziehungen zwischen den Determinanten, die in einer Matrix enthalten sind.

§ 29. Untersuchung von Vahlen.

Es mag eine Matrix von m Zeilen und n Spalten vorgelegt sein $(m < n)$.

Mit den in ihr enthaltenen Elementen lassen sich $(n)_m$ Determinanten m-ter Ordnung herstellen. Man frage nun: Wie viele von diesen sind unabhängig? Oder mit andern Worten: Wie viele von einander unabhängige Gleichungen bestehen zwischen ihnen?

Es seien a_{rs} die Elemente dieser Matrix:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}$$

Zunächst haben wir anzumerken, dass eine identische Gleichung zwischen den in dieser Matrix enthaltenen Determinanten m-ter Ordnung sich immer in Theile wird zerfällen lassen, deren jeder aus solchen Determinanten **homogen** zusammengesetzt sein muss; eine jede von diesen Determinanten ist homogen vom Grade m in den Elementen a und jeder einzelne der gedachten Theile, gleich Null gesetzt, wird für sich eine identische Beziehung darstellen.

Also werden sich alle oben geforderten Gleichungen stets dazu bringen lassen, dass sie in den $(n)_m$ Determinanten homogen erscheinen.

Wenn wir überdies sämmtliche Elemente a_{rs} vermöge der linearen Substitution

$$a_{rs} = \sum_{h=1}^{m} \alpha_{hr} a'_{hs}$$

umformen, dann wird jede in der Matrix der a enthaltene Determinante gleich der entsprechenden, die man in einer Matrix der a' anzunehmen hat, multipliziert mit der Determinante der α; es bleiben daher die homogenen Beziehungen zwischen jenen Determinanten unverändert und die Grössen α treten darin nicht auf.

Inzwischen können wir über die m^2 beliebigen Grössen α in der Weise verfügen, dass gleichviele von den Elementen a' bestimmte Werthe annehmen. Danach werden die $(n)_m - 1$ Verhältnisse der Determinanten Funktionen von nur $nm - m^2 = m(n - m)$ beliebigen Elementen und hieraus ersieht man, dass **höchstens** nur

$$\binom{n}{m} - 1 - m(n-m)$$

Gleichungen zwischen diesen Verhältnissen bestehen können. Das kommt aber mit dem Vorhandensein der gleichen Anzahl von homogenen Beziehungen zwischen denselben Determinanten überein.

Wir werden nun zeigen, dass sich wirklich ebenso viele Beziehungen und zwar sämmtliche von einander unabhängig herstellen lassen.

Betrachten wir die Determinante D, die aus den m ersten Spalten gebildet ist, und dazu ihre Reziproke, deren Element wir mit A_{rs} bezeichnen.

Danach richten wir unsere Aufmerksamkeit auf eine beliebige Determinante Δ, die aus den Spalten der Ordnungszahlen $r_1\, r_2 \ldots r_m$ besteht.

Wir wollen nach Spalten das Produkt der beiden Determinanten bilden:

$$\begin{vmatrix} a_{1r_1} & a_{1r_2} & \ldots & a_{1r_m} \\ a_{2r_1} & a_{2r_2} & \ldots & a_{2r_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{mr_1} & a_{mr_2} & \ldots & a_{mr_m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mm} \end{vmatrix}$$

Ein beliebiges Element der Produktdeterminante, in der Stellung i, s wird dann:

$$a_{1r_i} A_{1s} + a_{2r_i} A_{2s} + \cdots + a_{mr_i} A_{ms}$$

und dies ist nichts andres, als die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots\ldots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

wenn man an Stelle der s-ten Spalte die Spalte der Ordnungszahl r_i aus jener vorgelegten Determinante Δ einsetzt.

Das Ergebniss der Multiplikation ist also eine Determinante, deren Elemente ihrerseits wiederum Determinanten sind, und zwar werden die letzteren aus D dadurch hergeleitet, dass man die Spalten dieser ausgezeichneten Determinante nacheinander und einzeln durch diejenigen der Ordnungszahlen $r_1, r_2, \ldots r_m$ ersetzt.

Nun weiss man aber, dass die Determinante der A ihrerseits der Potenz $(m-1)$ von D gleich ist, also lässt sich, wie leicht ersichtlich, durch eine jede der aufgestellten Gleichungen eine Beziehung zwischen den Determinanten der Matrix darstellen.

Prüfen wir inzwischen diese Beziehungen.

Wenn Δ mit der Determinante D übereinstimmt, dann erhält man augenscheinlich eine Identität.

Wir nehmen weiterhin alle Δ von der Beschaffenheit in Betracht, dass $(m - 1)$ ihrer Spalten aus der Zahl der Spalten von D entnommen und nur eine unter den $(n - m)$ übrigbleibenden der gegebenen Matrix ausgewählt ist. Es leuchtet ein, dass Δ von solcher Beschaffenheit der Anzahl nach $m(n - m)$ vorhanden sind. Sie nun geben identischen Beziehungen ihren Ursprung, weil die Determinante, die dabei auf der rechten Seite erscheint, nämlich

$$\begin{vmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & D & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \Delta \end{vmatrix}$$

oder eine auf Reihenvertauschung beruhende Umwandlungsform hierzu nach ihrem Werthe: $D^{m-1}.\Delta$ mit der linken Seite übereinstimmt.

Die anderen Beziehungen, die man erhält, wenn man Δ auf jede weitere mögliche Art sich ändern lässt, der Zahl nach

$$\binom{n}{m} - 1 - m(n - m)$$

Gleichungen, sind sicherlich alle von einander unabhängig, weil bei einer jeden von ihnen linksseitig ein Faktor (und zwar ist dies Δ) erscheint, der von einer dieser Beziehungen zur andern wechselt und niemals auf der rechten Seite vorkommt. Wirklich wird die rechte Seite in jedem Falle von Determinanten gebildet, die sich aus der ursprünglichen Determinante D mit Veränderung einer einzigen Spalte herleiten lassen, während das linker Hand auftretende Δ stets eine Determinante ist, bei der wenigstens zwei Spalten von denen in D abweichen, da man ja andernfalls identische Beziehungen erhält.

Es stellt sich hiernach als erwiesen heraus:

Unter den $(n)_m$ Determinanten m-ter Ordnung einer Matrix aus n Spalten und m Zeilen bestehen

$$\binom{n}{m} - 1 - m(n - m)$$

unabhängige Gleichungen.

Dieser Nachweis ist in einem neueren Aufsatze von Vahlen enthalten:

Vahlen, Über die Relationen zwischen den Determinanten einer Matrix. Journ. f. Math. Bd. 112 (1893) [306—310].

§ 30. Formel von Netto, eine verwandte von Pascal.

Es ist von Wichtigkeit, den Grad der im vorangehenden Paragraphen aufgefundenen Gleichungen hier anzumerken.

Nehmen wir zunächst an, dass nur zwei von den Ordnungszahlen

$$r_1\ r_2\ \ldots\ r_m$$

verschieden sind von den Zahlen

$$1\ 2\ \cdots\ m$$

Demgemäss mögen zum Beispiel die Ordnungszahlen r, s unter den:

$$m+1,\ m+2,\ \cdots\ n$$

gewählt sein.

Die den gedachten beiden Zahlen entsprechenden Spalten würde man an die Stelle derer mit den Ordnungszahlen i und j zu setzen haben.

Dann wird auf der rechten Seite die erste Zeile in ihrem ersten Elemente dem Werthe von D gleichkommen und in den andern Elementen allen dem Werthe Null; die zweite Zeile im zweiten Elemente dem Werthe von D und in den andern der Null und so wird es mit allen den andern Zeilen gehen, ausgenommen nur die i-te und j-te Zeile, in denen in guter Ordnung, wie folgt, die Determinanten

$$\begin{matrix} (r\ 2\ \cdots\ m) & (1\ r\ 3\ \cdots\ m) & \cdots & (1\ 2\ \cdots\ r) \\ (s\ 2\ \cdots\ m) & (1\ s\ 3\ \cdots\ m) & \cdots & (1\ 2\ \cdots\ s) \end{matrix}$$

erscheinen werden, wenn wir mit dem Symbol

$$(r\ 2\ \cdots\ m)$$

die Determinante andeuten, die aus den Spalten mit Ordnungszahlen

$$r,\ 2,\ \cdots\ m$$

besteht und so fort.

Die Entwicklung der rechten Seite wird nunmehr (da ja die Elemente D sämmtlich auf der Hauptdiagonale stehen) sich darstellen in dem Produkt

$$D^{m-2} \cdot \begin{vmatrix} (1, 2 \cdots i-1, r, i+1 \cdots m) & (1, 2 \cdots j-1, r, j+1 \cdots m) \\ (1, 2 \cdots i-1, s, i+1 \cdots m) & (1, 2 \cdots j-1, s, j+1 \cdots m) \end{vmatrix}$$

Wenn wir daher mit der linken Seite vergleichen und den gemeinsamen Faktor D^{m-2} unterdrücken, so erhalten wir eine Beziehung zweiten Grades in den Determinanten. Dergleichen Beziehungen er-

geben sich der Zahl nach $(n - m)_2 \cdot (n)_2$. Entsprechend erhält man ihrer $(n - m)_3 \cdot (n)_3$ dritten Grades und so weiter.

Wenden wir nämlich beiderseits die symbolische Bezeichnung an, die wir für die in Rede stehenden Determinanten soeben eingeführt hatten, so wird die gefundene Beziehung die folgende:

$$(1, 2, \cdots i-1, r, i+1, \cdots j-1, s, j+1, \cdots m)\,(1, 2, \cdots m) =$$
$$= (1, 2, \cdots i-1, r, i+1, \cdots m)\,(1, 2, \cdots j-1, s, j+1, \cdots m) -$$
$$- (1, 2, \cdots i-1, s, i+1, \cdots m)\,(1, 2, \cdots j-1, r, j+1, \cdots m)$$

Lassen wir nun die Werthe der Ordnungszahlen r, s unverändert, vertauschen aber die Stellen, in die wir sie einsetzen, das heisst, stellen wir uns vor, dass wir die r-te Spalte nicht mehr an die i-te Stelle bringen, sondern an die h-te. Dann ergiebt sich diese weitere Gleichung:

$$(1, 2, \cdots h-1, r, h+1, \cdots j-1, s, j+1, \cdots m)\,(1, 2, \cdots m) =$$
$$= (1, 2, \cdots h-1, r, h+1, \cdots m)\,(1, 2, \cdots j-1, s, j+1, \cdots m) -$$
$$- (1, 2, \cdots h-1, s, h+1, \cdots m)\,(1, 2, \cdots j-1, r, j+1, \cdots m)$$

und so würde man auch wieder eine andere Gleichung erhalten, verwandelte man dann h in k.

Diese drei Beziehungsgleichungen enthalten nun alle dieselben drei Koeffizienten:

$$(1, 2, \cdots m)$$
$$(1, 2, \cdots j-1, s, j+1, \cdots m)$$
$$(1, 2, \cdots j-1, r, j+1, \cdots m)$$

Betrachten wir einmal die Determinante 3-ter Ordnung, gebildet aus den neun andern Grössen, die in gedachten drei Gleichungen auftreten. Diese Determinante muss verschwinden, wie wir es im Allgemeinen zeigen werden, wenn wir uns mit der Lehre von den linearen Gleichungen werden zu beschäftigen haben. Übrigens würde man auch hier dies sogleich einsehen, wenn man die drei Gleichungen mit den algebraischen Komplementen der Elemente der ersten Spalte, die der genannten Determinante angehört, multiplizieren und dann die Summe bilden würde.

Ziehen wir die Matrix der ersten m Spalten und der zwei andern, der r-ten und der s-ten in Betracht und deuten einfacher durch

$$\Delta_{\alpha\beta}$$

die Determinante an, welche aus dieser Matrix durch Tilgung der α-ten und β-ten Spalte gewonnen wird, so ergiebt sich, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \Delta_{ij} & \Delta_{is} & \Delta_{ir} \\ \Delta_{hj} & \Delta_{hs} & \Delta_{hr} \\ \Delta_{kj} & \Delta_{ks} & \Delta_{kr} \end{vmatrix}$$

identisch Null werden muss.

Dies Ergebniss findet sich im Beginn des Aufsatzes von Netto, Zwei Determinantensätze. (Act. math. Bd. 17 S. 199 f.)

Dasselbe kann auch leicht verallgemeinert werden.

Es ist eine wichtige Bemerkung, dass auf dem von uns verfolgten Wege sich ein Ergebniss gewinnen lässt, welches von dem dort erhaltenen abweicht, das aber mit ihm eng verwandt erscheint.

Wenn wir in der Gleichung zweiten Grades, von der wir ausgegangen sind, anstatt die Kennziffer i zu verwandeln, r in h umwandeln und in k, und dann dasselbe Verfahren anwenden, so erhalten wir eine Determinante der dritten Ordnung, die von der soeben niedergeschriebenen verschieden ist.

Betrachten wir die Matrix der ersten m Spalten mit Hinzunahme der weiteren Spalten $srhk$ und bezeichnen mit $\Delta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ die Determinante, welche aus solcher Matrix bei Tilgung der Spalten $\alpha\beta\gamma\delta$ hervorgeht, so ergiebt sich:

$$\begin{vmatrix} \Delta_{ijhk} & \Delta_{ishk} & \Delta_{jshk} \\ \Delta_{ijkr} & \Delta_{iskr} & \Delta_{jskr} \\ \Delta_{ijrh} & \Delta_{isrh} & \Delta_{jsrh} \end{vmatrix} = 0$$

Diese Gleichung lässt sich in einer Form darstellen, die ihre Verwandtschaft mit der schon angeführten Nettoschen Formel besser erkennen lässt. Stellen wir uns nämlich eine Matrix vor, die aus allen den betrachteten Spalten gebildet wird, die sechs Spalten mit den Ordnungszahlen i, j, s, r, h, k ausgenommen und bezeichnen mit $\Delta_{\alpha\beta}$ eine Determinante, die man erhält, wenn man zu den $(m-2)$ Spalten jener Matrix die Spalten α, β hinzufügt, so nimmt die vorausgehende Determinante genau dieselbe Gestalt wie die Determinante von Netto an, nur dass den Elementen eine abweichende Bedeutung zukommt. Während nämlich bei der Determinante Nettos die Elemente Minoren sind, die eine Matrix von $(m+2)$ Spalten bei Tilgung zweier Spalten entstehen lässt, sind in unserer Determinante die Elemente Minoren, die einer Matrix von $(m-2)$ Spalten entstammen, indem zwei Spalten hinzugefügt werden.

Mit Bezug auf den Inhalt dieses Paragraphen vergleiche man wiederum den oben am Ende von § 28 angeführten Aufsatz von Pascal, Ann. di mat. 1896 in seinem § 2.

§ 31. Grundform der Beziehungen zwischen den Determinanten einer Matrix.

An diese Erörterungen über die Beziehungen zwischen den Determinanten einer Matrix schliessen sich solche an, die bei der Beschäftigung mit der symbolischen Berechnung algebraischer Formen in n Veränderlichen vorkommen.

Die Gleichungen, die wir gefunden haben, sind zum Theil vom zweiten Grade in den Determinanten, andere dritten Grades und so fort.

Nun ist es von Wichtigkeit zu bemerken, dass sie alle auf eine einzige Grundform, die bezüglich der Determinanten vom zweiten Grade ist, sich zurückführen lassen. Die Gleichung, die man auf diese Weise erhält, pflegt man in der Lehre von der symbolischen Berechnung der algebraischen Formen eine fundamentale Identität zu nennen.

Man sehe die Abhandlung:

Pascal, Sopra le relazioni che possono sussistere identicamente fra formazioni simboliche del tipo invariantivo nella teoria generale delle forme algebriche. Acc. Linc. mem. ser. 4. vol. 5 (1888) [375—387].

Wir wollen, wie oben, mit $(i_1\, i_2 \ldots i_m)$ die Determinante aus den Spalten der Ordnungszahlen $i_1\, i_2 \ldots i_m$ bezeichnen.

Die allgemeine Beziehungsgleichung, die auf einer der vorangehenden Seiten (Siehe S. 116) gewonnen wurde, lässt sich dann in dieser Form schreiben:

$$\text{a)}\quad (i_1 \cdots i_m)\,(1\,2 \cdots m)^{m-1} = \begin{vmatrix} (i_1\, 2 \cdots m) & (1\, i_1\, 3 \cdots m) & \cdots & (1\, 2 \cdots i_1) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (i_m\, 2 \cdots m) & (1\, i_m\, 3 \cdots m) & \cdots & (1\, 2 \cdots i_m) \end{vmatrix}$$

Wir werden nun zeigen, dass alle Gleichungen dieser Hauptform sich mittelst gewisser anderer Beziehungen zweiten Grades bestätigen lassen, die man in folgender Weise erhält.

Betrachten wir die Determinante von der Ordnung $(m+1)$, die wir mit dem zunächst zu beschreibenden Verfahren herstellen. Wir wählen in der vorgelegten Matrix die Spalten mit den Ordnungszahlen $i_1\, i_2 \ldots i_m\, i_{m+1}$ aus und bilden mit diesen die Matrix von m Zeilen und $(m+1)$ Spalten, auf eine weitere letzte Zeile jedoch stellen wir die Determinanten von der Form:

$$\begin{array}{l} (i_1 \quad j_1\, j_2 \cdots j_{m-1}) \\ (i_2 \quad j_1\, j_2 \cdots j_{m-1}) \\ \cdot \quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (i_{m+1}\, j_1\, j_2 \cdots j_{m-1}) \end{array}$$

wobei die Ordnungszahlen $j_1 j_2 \ldots j_{m-1}$ denen von $(m - 1)$ andern, aus der gegebenen Matrix ausgewählten Spalten entsprechen (im Besonderen können einige der j einigen der schon herangezogenen i gleich sein). Die auf diese Weise dargestellte Determinante ist identisch Null, weil ja augenscheinlich die Elemente der letzten Zeile ein und dieselbe lineare Verbindung aller entsprechenden Elemente der parallelen Zeilen vorstellen.

Entwickeln wir diese Determinante nach den Elementen ihrer letzten Zeile, so ergiebt sich also

$$\text{b)} \qquad \sum \pm (i_1 i_2 \cdots i_m)(i_{m+1} j_1 j_2 \cdots j_{m-1}) = 0$$

worin sich die Summation über alle zyklischen Permutationen der Zahlen $i_1 i_2 \ldots i_m i_{m+1}$ erstreckt und das Zeichen der verschiedenen Glieder zu wechseln ist oder nicht, jenachdem m ungerade ist oder gerade.

Um leichter verstanden zu werden, wollen wir die Elemente $i_1 i_2 \ldots i_m i_{m+1}$ zyklisch wechselnde nennen, die andern aber feste Elemente. Wenn die festen Elemente sämmtlich verschieden sind von den zyklisch wechselnden, so enthält Formel b) $(m + 1)$ Glieder. Wenn r feste Elemente gleich ebenso vielen zyklisch wechselnden Elementen sind, dann verschwinden r Glieder der allgemeinen Formel und es bleiben demzufolge nur $(m - r + 1)$ Glieder übrig.

Seltsamer Weise hat Fürstenau sich genöthigt gesehen, eine ziemlich lange Beweisführung dieser besonderen Identität zu widmen, während er doch von der allgemeinen Identität seinen Ausgang nahm.

Fürstenau, Beiträge zur Theorie der Determinanten. Journ. f. Math. Bd. 89 (1880) [86—88].

Mit Hilfe dieser fundamentalen Identität vom zweiten Grade kann man nun alle im Vorangehenden aufgeführten Identitäten darstellen; man kann nämlich zeigen, dass von derselben alle die andern herstammen.

Setzen wir im Besondern voraus,

$$j_2 \; j_3 \; \cdots \; j_{m-1}$$

wären gleich den

$$i_1 \; i_2 \; \cdots \; i_{m-2}.$$

Dann werden $(m - 2)$ Glieder in b) verschwinden, da ja in ihnen Determinanten mit zwei übereinstimmenden Spalten auftreten. Es bleiben nur drei Glieder, nämlich:

$$\begin{aligned}&(i_1\ i_2 \cdots i_{m-2}\ i_{m-1}\ i_m\ )\ (i_{m+1}\ j_1\ i_1 \cdots i_{m-2}) + \\ + &(i_1\ i_2 \cdots i_{m-2}\ i_m\ \ i_{m+1})\ (i_{m-1}\ j_1\ i_1 \cdots i_{m-2}) + \\ + &(i_1\ i_2 \cdots i_{m-2}\ i_{m+1}\ i_{m-1})\ (i_m\ \ j_1\ i_1 \cdots i_{m-2}) = 0\end{aligned}$$

Wenn wir im Besonderen $i_1, i_2, \ldots i_m = 1, 2, \ldots m$ setzen und lassen die Ordnungszahlen $i_{m+1}\, j_1$ auf jede mögliche Art wechseln, so ergeben sich Gleichungen, die nichts andres sind, als eben die Beziehungen vom zweiten Grade, die man aus der allgemeinen Formel a) gewinnt. Wirklich war ja oben (am Anfang von § 30) gezeigt worden, dass die Beziehungen zweiten Grades aus a) hervorgehen, wenn nur zwei der Zahlen $i_1\, i_2 \ldots i_m$ von den $1, 2, \ldots m$ verschieden sind. Man erhält dann auf der rechten Seite den Faktor $(1, 2, \ldots m)^{m-2}$ und wird dieser Faktor gestrichen, so ergeben sich genau die Beziehungen der eben verzeichneten Art. Wir wollen nun zu solchen Gleichungen dritten Grades übergehen. Sie entstehen aus a), wenn drei der Ordnungszahlen $i_1\, i_2 \ldots i_m$ von den $1, 2, \ldots m$ verschieden sind.

Von diesen wird die eine beispielsweise:

$$(1,\ 2, \cdots i_{m-2}\ i_{m-1}\ i_m)\ (1,\ 2, \cdots m)^2 =$$
$$= \begin{vmatrix} (1,2,\cdots i_{m-2}, m-1, m) & (1,2,\cdots m-2, i_{m-2}, m) & (1,2,\cdots m-2, m-1, i_{m-2}) \\ (1,2,\cdots i_{m-1}, m-1, m) & (1,2,\cdots m-2, i_{m-1}, m) & (1,2,\cdots m-2, m-1, i_{m-1}) \\ (1,2,\cdots i_m\ , m-1, m) & (1,2,\cdots m-2, i_m\ , m) & (1,2,\cdots m-2, m-1, i_m\ ) \end{vmatrix}$$

Wir wollen diese Determinante nach den Elementen ihrer letzten Spalte entwickeln und dabei Bedacht nehmen auf die mit der zuletzt hingeschriebenen verwandten Beziehungen.

Die Minoren zweiter Ordnung, die in den zwei ersten Spalten dieser Determinante enthalten sind, sind beziehungsweise gleich:

$$\begin{aligned}&+ (1, 2, \cdots i_{m-2}\ i_{m-1}\ m)\ (1, 2, \cdots m), \\ &- (1, 2, \cdots i_{m-2}\ i_m\ \ m)\ (1, 2, \cdots m), \\ &+ (1, 2, \cdots i_{m-1}\ i_m\ \ m)\ (1, 2, \cdots m)\end{aligned}$$

und daher entsteht, wenn wir den gemeinsamen Faktor $(1, 2, \cdots m)$ tilgen, diese Gleichung:

$$\begin{aligned}&(1, 2, \cdots i_{m-2}\ i_{m-1}\ i_m)\ (1, 2, \cdots m-2, m-1, m\ ) - \\ - &(1, 2, \cdots i_{m-2}\ i_{m-1}\ m)\ (1, 2, \cdots m-2, m-1, i_m\ ) + \\ + &(1, 2, \cdots i_{m-2}\ i_m\ \ m)\ (1, 2, \cdots m-2, m-1, i_{m-1}) - \\ - &(1, 2, \cdots i_{m-1}\ i_m\ \ m)\ (1, 2, \cdots m-2, m-1, i_{m-2}) = 0\end{aligned}$$

die man auch aus b) darstellen kann, indem man setzt:

$$j_1 = 1, \quad j_2 = 2, \quad \cdots \quad j_{m-1} = m - 1$$

und

$$i_1 = 1, \quad \cdots \quad i_{m-3} = m - 3, \quad i_{m+1} = m$$

Demgemäss wird sich auch nachweisen lassen, dass das Nämliche für die Gleichungen 4-ten Grades eintritt, die in der Formel a) enthalten sind, und daher gilt der Satz:

Im Allgemeinen sind alle Formeln der Gattung a) immer auf Formeln der Gattung b) (fundamentale Identitäten) zurückführbar, dergestalt dass schliesslich in solche die sämmtlichen zwischen den Minoren einer rechteckigen Matrix vorhandenen Beziehungen umgewandelt erscheinen.

Eine Untersuchung über eine sehr grosse Zahl der aus jener Gattung b) hervorgehenden Identitäten findet sich bei Hunyady.

Hunyady, Über einige Determinantensätze. (Magyarisch.) Budapest Értek. Bd. 9 (1882) Nr. 10 [1—19].

Hunyady, Über einige Determinantengleichungen, welche mit verschiedenen Abhandlungen von Hesse und Cayley in Zusammenhang stehen. Journ. f. Math. Bd. 94 (1883) [171—178].

§ 32. Beziehungen zwischen den Determinanten, die aus denselben Elementen gebildet sind.

Verwandt mit der Untersuchung des vorigen Paragraphen ist die, welche den Inhalt des hier beginnenden ausmacht.

Mit denselben n^2 gegebenen Elementen lassen sich $n^2!$ Determinanten der Ordnung n herstellen. Unter diesen sind einige dem absoluten Werthe nach einander gleich, nämlich alle die, welche aus einander hervorgehen, wenn man die Zeilen oder die Spalten unter sich vertauscht.

Wir werden hier Lehrsätze behandeln, die von Bagnera und von Pascal gefunden sind. Sie betreffen Beziehungen zwischen Determinanten, die verschieden sind, aber aus denselben Elementen dargestellt.

Bagnera, Sopra i determinanti que si possono formare cogli stessi n^2 elementi. Giorn. di Batt. vol. 25 (1887) [228—231].

Pascal, Sopra le relazioni fra i determinanti formati coi medesimi elementi. Ist. Lomb. Rendic. ser. 2 vol. 29 (1896) [436—438].

Es sei die Determinante n-ter Ordnung aus den Elementen a_{ij} vorgelegt. Vertauschen wir auf jede mögliche Weise die Elemente der i-ten Zeile, so ergeben sich $n!$ verschiedene Determinanten. Ist nun Δ eine von diesen und Δ_{jk} eine andere, die man aus Δ gewinnt, wenn man zwei Elemente der i-ten Zeile, beispielsweise a_{ij} und a_{ik} mit einander vertauscht, so kann man leicht einen Ausdruck für die

Differenz von Δ und Δ_{jk} angeben. Es genügt nämlich dazu die Bemerkung, dass man bei Entwicklung von Δ nach den Elementen der i-ten Zeile erhält:

$$\Delta = \Omega + a_{ij} A_{ij} + a_{ik} A_{ik}$$

Hierbei sind mit A_{ij}, A_{ik} die algebraischen Komplemente jener Elemente der i-ten Zeile benannt und durch Ω ist die Gesammtheit aller übrigen Glieder angedeutet.

Man erhält dann:

$$\Delta_{jk} = \Omega + a_{ik} A_{ij} + a_{ij} A_{ik}$$

und daraus

$$\Delta - \Delta_{jk} = (a_{ij} - a_{ik})(A_{ij} - A_{ik})$$

Wenn man hier j, k auf alle $(n)_2$ möglichen Arten in dem Bereich der Zahlen $1 \ldots n$ wechseln lässt und alle diese Gleichungen multipliziert, so ergiebt sich:

$$\prod_{j,k} (\Delta - \Delta_{jk}) = \prod_{j,k} (a_{ij} - a_{ik}) \prod_{j,k} (A_{ij} - A_{ik})$$

Das Symbol $\prod$ erstreckt sich hier augenfällig auf $(n)_2$ Faktoren.

Wählen wir nun als Ausgangspunkt unserer Betrachtung nicht Δ, sondern eine andere von den $n!$ Determinanten, die aus Δ mittelst einer beliebigen Permutation der Elemente der i-ten Zeile hervorgeht, zum Beispiel D, so erhalten wir

$$\prod (D - D_{jk})$$

auf entsprechende Weise ausgedrückt, das heisst, abgesehen vom Vorzeichen ergiebt sich die Gleichheit der beiden linken Seiten

$$\prod_{j,k} (\Delta - \Delta_{jk}) = \pm \prod_{j,k} (D - D_{jk})$$

Damit ist der Lehrsatz gegeben:

Bildet man $n!$ Determinanten, indem man in vorgelegter Determinante auf jede mögliche Weise die n Elemente einer beliebigen Zeile mit einander vertauscht, wählt dann eine derselben aus und stellt alle $(n)_2$ Differenzen her zwischen ihr und den aus ihr durch Vertauschung nur zweier einzelner Elemente abgeleiteten Determinanten, so ist das Produkt von allen diesen Differenzen konstant, wiewohl die Determinante, die man zu Anfang ausgewählt hat, eine ganz beliebige sein mag. (Bagnera.)

Demselben Verfasser verdanken wir auch diesen weiteren Lehrsatz:

Bildet man $n!$ Determinanten, indem man in vorgelegter Determinante auf jede mögliche Weise die n Elemente einer Zeile vertauscht, wählt $(n+1)$ unter ihnen aus und führt dann bei jeder von diesen Determinanten auf die Elemente der betreffenden Zeile n ähnliche Substitutionen aus, so wird die Determinante von der Ordnung $(n+1)$, deren Elemente die Ergebnisse gedachten Verfahrens sind, gleich Null.

Bezeichnen wir mit $A_{i1}\ A_{i2} \dots A_{in}$ die algebraischen Komplemente der Elemente der i-ten Zeile.

Die Elemente $a_{i1} \dots a_{in}$ der i-ten Zeile unterwerfen wir $(n+1)$ Substitutionen, wir erhalten damit $(n+1)$ Permutationen dieser Elemente. Solche Permutationen sollen angedeutet werden durch $P_{11}\ P_{12} \dots P_{1,n+1}$ und jeder von ihnen wird eine Determinante $\Delta_{P_{1h}}$ entsprechen. $(h = 1, 2, \dots n+1)$

Wenn wir auf die P wiederum ähnliche Substitutionen anwenden, so erhalten wir andere $(n+1)$ Permutationen, die man mit P_{2h} bezeichnen kann und so weiter.

Es seien

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots \cdot \\ \alpha_{n+1,1} & \alpha_{n+1,2} & \dots \alpha_{n+1,n} \end{matrix}$$

die Elemente $a_{i1} \dots a_{in}$, gemäss den Permutationen $P_{11} \dots P_{1,n+1}$ vertauscht.

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots \alpha_{1n} & \Delta_{P_{11}} \\ \cdot & \dots \cdot & \cdot \\ \alpha_{n+1,1} & \dots \alpha_{n+1,n} & \Delta_{P_{1,n+1}} \end{vmatrix}$$

ist Null, weil die Elemente ihrer letzten Spalte dieselben linearen Verbindungen der Elemente der übrigen Spalten darstellen.

Wenn wir gleicherweise

$$\Delta_{P_{21}} \dots \Delta_{P_{2,n+1}}$$

in Betracht ziehen, so erhalten wir eine gleichartige Determinante, worin die ersten n Spalten, abgesehen von ihrer Anordnung, dieselben sind, da sie nämlich aus jenen mittelst einer ähnlichen Substitution sich herleiten lassen, die sich jedoch auf die ersten n Elemente der Zeilen bezieht.

Nennen wir also

$$\lambda_1\ \lambda_2 \dots \lambda_{n+1}$$

die algebraischen Komplemente der Elemente der letzten Spalte in vorausgehender Determinante, so erhalten wir die identischen Gleichungen:

$$\begin{array}{l} \lambda_1 \Delta_{p_{11}} + \cdots + \lambda_{n+1} \Delta_{p_{1,\,n+1}} = 0 \\ \lambda_1 \Delta_{p_{21}} + \cdots + \lambda_{n+1} \Delta_{p_{2,\,n+1}} = 0 \\ \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda_1 \Delta_{p_{n+1,\,1}} + \cdots + \lambda_{n+1} \Delta_{p_{n+1,\,n+1}} = 0 \end{array}$$

und diese Gleichungen zeigen, dass die Determinante der Δ identisch verschwindet, weil die Elemente einer Spalte dieselben linearen Verbindungen aus denen der parallelen Spalten sind.

Diese beiden Lehrsätze liefern zwei Hauptformen von Beziehungen zwischen solchen Determinanten, wie man sie durch alle möglichen Vertauschungen der Elemente einer Zeile innerhalb einer vorgelegten Determinante darstellen kann.

Jedoch können wir Formen von Beziehungen auffinden von einer noch allgemeineren Art. Wir sondern zu diesem Zwecke die Matrix der ersten $(n - 2)$ Spalten aus. Es mögen dann $\alpha\, \alpha'\, \alpha''$ drei Spalten sein, die man aus der $(n - 1)$-ten durch Vertauschung der Elemente nach drei verschiedenen Weisen erhält und mögen $\beta\, \beta'\, \beta''$ drei Spalten sein, die unabhängig davon aus der n-ten hervorgehen, wenn man ihre Elemente auf dreifache Art vertauscht.

Deutet dann $\Delta_{\alpha\beta}$ auf die Determinante hin, die gewonnen wird, wenn man mit den $(n - 2)$ ersten festen Spalten die Spalten α, β vereinigt, so ergiebt sich die bekannte Beziehung (Siehe § 30)

$$\begin{vmatrix} \Delta_{\alpha\beta} & \Delta_{\alpha\beta'} & \Delta_{\alpha\beta''} \\ \Delta_{\alpha'\beta} & \Delta_{\alpha'\beta'} & \Delta_{\alpha'\beta''} \\ \Delta_{\alpha''\beta} & \Delta_{\alpha''\beta'} & \Delta_{\alpha''\beta''} \end{vmatrix} = 0$$

Es stellt sich hierin eine Beziehung dar zwischen den Determinanten, die man aus einer gegebenen gewinnt, wenn man die Elemente einer Spalte und desgleichen die Elemente einer zweiten Spalte unter einander vertauscht.

Man würde auf diese Weise andere Beziehungen herstellen können zwischen Determinanten, die ihren Ursprung der Vertauschung von Elementen innerhalb dreier Spalten verdanken. Aus so gestalteten Beziehungsgleichungen lässt sich für den besonderen Fall die Gleichung vom Grade $(n + 1)$ zwischen den $\Delta_{p_{ij}}$ herleiten, die wir oben gewonnen haben. Wir werden uns hier nicht bei Einzelheiten derartiger Betrachtungen aufhalten. Man sehe diesbezüglich

Pascal, Ist. Lomb. Rend. 1896.

§ 33—45. Berechnung von Determinanten mit besonderen Elementen.

§ 33. Die Determinante von Vandermonde oder Cauchy und ihre Verallgemeinerung.

Wir betrachten die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots a_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Augenscheinlich liefert ihre Entwickelung einen rationalen ganzen Ausdruck in den a. Für $a_i = a_j$ werden zwei ihrer Reihen identisch und mithin wird sie selbst Null. Also ist sie durch $(a_i - a_j)$ theilbar. Da man i, j und zwar jedes auf n-fache Weise sich ändern lassen kann, so erhält man im Ganzen $\frac{1}{2} n (n-1)$ in diesem Betracht mögliche Differenzen und die Determinante D ist stets durch eine jede von diesen theilbar. D muss also als Faktor enthalten dies Produkt:

$$\begin{array}{r} (a_1 - a_2)\,(a_1 - a_3) \cdots (a_1 - a_n) \\ (a_2 - a_3) \cdots (a_2 - a_n) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdots\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (a_{n-1} - a_n) \end{array}$$

Man sieht leicht, dass der andere Faktor nur eine Konstante sein kann. Dieses Produkt ist nämlich in Rücksicht auf jedes der a vom Grade $(n-1)$ und die Entwicklung der Determinante ist mit Bezug auf jedes a genau desselben Grades.

Um die Konstante zu berechnen, genügt es seine Aufmerksamkeit dem Koeffizienten des Gliedes:

$$a_2\, a_3^2\, a_4^3 \cdots a_n^{n-1}$$

zuzuwenden, das aus den Elementen der Hauptdiagonale entspringt.

Dieses Glied gewinnt man aus dem oben niedergeschriebenen Produkte, wenn man die zweiten Bestandtheile aller der Binome mit einander multipliziert. Es ergiebt sich dann der nämliche Ausdruck mit dem Koeffizienten

$$(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1} = (-1)^{\frac{1}{2} n (n-1)}$$

also:

$$D = (-1)^{\frac{1}{2} n (n-1)} \prod_{i,j}^{1 \cdots n} (a_i - a_j) \quad (i < j).$$

Wir deuten mit dem Symbol Π das Produkt aller Differenzen der a an und meinen, dass hierbei stets $i < j$ sein soll.

Wenn man die a als die Wurzeln einer algebraischen Gleichung vom Grade n sich vorstellt, so wird D die Quadratwurzel der sogenannten Diskriminante der Gleichung. Man pflegt D auch die Determinante der Wurzeln einer Gleichung zu nennen. Auch heisst sie Potenzdeterminante oder Determinante von Cauchy. Der letztere Verfasser stellte über sie Betrachtungen von uneingeschränkter Gültigkeit an, während Vandermonde sie für einen besonderen Fall untersucht hatte.

Man vergleiche:

Jacobi, De functionibus alternantibus earumque divisione per productum e differentiis elementorum conflatum. Journ. f. Math. Bd. 22 (1841) [360—371], wieder abgedruckt in Jacobi, Gesammelte Werke, Berlin 1884, Bd. 3 [441—452]. (Deutsche Ausgabe mit Anmerkungen durch Stäckel in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften N. 77.)

Baltzer, Det. 1881. S. 85 Anm. und die Anmerkungen Stäckels zu Artikel 1 des Jacobischen Aufsatzes in der soeben angezogenen deutschen Ausgabe.

Wir bilden nun das Quadrat der Determinante Vandermondes. Bezeichnen wir im Allgemeinen mit s_p die Summe der gleichen Potenzen der a, so dass also

$$s_p = a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p$$

so ergiebt sich, dass gedachtes Quadrat gleich ist

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

also gleich einer Hankelschen Determinante. (Siehe § 19.)

Man kann eine weit allgemeinere Determinante, als die von Vandermonde, auf folgende Art zur Untersuchung stellen:

In der von uns behandelten Determinante haben die auf einander folgenden Zeilen zu Elementen der Reihe nach die Potenzen von n Grössen $a_1, a_2, \ldots a_n$.

Wir wollen im Gegensatz hierzu eine Determinante bilden, bei der die Elemente der auf einander folgenden Zeilen beliebige Potenzen von n Grössen darstellen. Dem entspricht zum Beispiel die Zusammensetzung der nachstehenden Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1^{r_1} & a_2^{r_1} & \cdots & a_n^{r_1} \\ a_1^{r_2} & a_2^{r_2} & \cdots & a_n^{r_2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_1^{r_n} & a_2^{r_n} & \cdots & a_n^{r_n} \end{vmatrix}$$

Es scheint hier nicht die geeignete Gelegenheit, bis ins Einzelne auf die Behandlung solcher Determinanten einzugehen; wir werden uns auf einige besondere Fälle beschränken. Wir wollen einzig anmerken, dass dieselben sich mittelst der sogenannten vollständigen homogenen Funktionen der n Grössen $a_1 \dots a_n$ und vom Grade r ausdrücken lassen. Man gelangt zu diesen Funktionen, wenn man die r-te Potenz der Summe jener Grössen entwickelt und an Stelle der Zahlen-Koeffizienten, die in dieser Entwicklung auftreten, die Einheit einsetzt.

Diese Funktionen erhielten durch Wronski, der über sie eine Untersuchung durchgeführt hat, den Namen der Funktionen Aleph.

(Vergl. Dickstein, Sur les découvertes mathématiques de Wronski. Bibl. math. 1892. Neue Folge 6 [48—52, 85—90] S. 85 ff.)

Vahlen in Encycl. d. math. Wiss. I B 3 b. Symmetrische Funktionen, Art. 12.

Schriften, die man bezüglich der hier berührten Aufgaben einsehen mag, sind:

Borchardt, Über ein die Elimination betreffendes Problem. Akad. Berlin, Ber. 1859 (1860) [376—388] S. 378. Dasselbe unter dem Titel:

Borchardt, Über eine der Interpolation entsprechende Darstellung der Eliminations-Resultante. Journ. f. Math. Bd. 57 (1860) [111—121], wieder abgedruckt in Borchardts Werken [133—144].

Borchardt, Über eine Interpolationsformel für eine Art symmetrischer Funktionen und über deren Anwendung. Akad. Berlin. Abh. 1860 [1—20], wieder abgedruckt in Borchardts Werken [153—172].

Trudi, Intorno ad un determinante più generale di quello delle radici delle equazioni, ed alle funzioni omogenee complete di queste radici. Giorn. di Batt. vol. 2 (1864) [152—158, 180—186]. Dieser Aufsatz findet sich mit fast dem gleichen Titel in Acc. Nap. Rend. anno 3 (1864) [121—134].

Stern, Über einen Satz aus der Determinantentheorie. Journ. f. Math. Bd. 66 (1866) [285—288].

Rubini, Su talune formole relative a determinanti. Giorn. di Batt. vol. 4 (1866) [187—192].

Naegelsbach, Über eine Klasse symmetrischer Funktionen. Zweibrücken 1871. Gymn. Progr.

Fiore, Dimostrazione d'una trasformazione di determinanti. Giorn. di Batt. vol. 10 (1872) S. 170.

Naegelsbach, Studien zu Fürstenaus neuer Methode der Darstellung und Berechnung der Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Koeffizienten. Arch. d. Math. 59. Th. (1876) [147—192].

Garbieri, Nuovo teorema algebrico e sua speciale applicazione ad una maniera di studiare le curve razionali. Giorn. di Batt. vol. 16 (1878) [1—17, 108—147].

Crocchi, Sopra le funzioni Aleph e il determinante di Cauchy. Giorn. di Batt. vol. 17 (1879) [218—231].

Del Re, Relazione tra due determinanti. Giorn. di Batt. vol. 19 (1881) S. 116. 117.

Besso, Di alcune proprietà dell' equazione differenziale lineare omogenea del second' ordine, e di alcune equazione algebriche. Acc. Linc. mem. ser. 3. vol. 14 (1882—83) [14—29].

Marcolongo, Generalizzazione di un teorema sui determinanti. Giorn. di Batt. vol. 25 (1887) [298—302].

Anglin, Théorèmes sur les déterminants. Bull. soc. math. de Fr. vol. 15 (1887) [120—129].

Loria, Nota su una classe di determinanti. Giorn. di Batt. vol. 26 (1888) [329—333].

Die beiden letzten Verfasser stellen als neue Ergebnisse dar, was schon von Anderen vorher gefunden worden war.

Studnička, Über Potenzdeterminanten und deren wichtigste Eigenschaften. Böhm. Ges. Ber. 1896 No. 22.

Studnička, Beitrag zur Theorie der Potenz- und Kombinationsdeterminanten. Böhm. Ges. Ber. 1897 No. 1 und Neuer Beitrag . . . ebenda 1897 No. 16.

Borchardt, Stern a. a. O. und Andere beschäftigen sich mit einer andern Art der Verallgemeinerung der Determinante von Cauchy.

Der Leser möge überdies auch die Schriften über Determinanten von Günther, Scott, Baltzer und Anderen einsehen. Günther, Det. 1877. S. 69. Scott, Det. 1880. chap. 9 [115—128]. Baltzer, Det. 1881. § 10 [85—109].

Zunächst leuchtet vor Allem ein, dass die oben gekennzeichnete allgemeinere Determinante durch das Produkt der gegenseitigen Differenzen aller der Grössen a theilbar ist; daraus schliessen wir also, dass sie durch die Determinante D von Vandermonde theilbar ist. Wir heben nun den besonderen Fall hervor, man habe aus der Determinante Vandermondes eine Zeile (die mit den r-ten Potenzen der a) weggenommen und dort die Zeile mit n-ten Potenzen der a eingesetzt.

Man erhält hiermit die Determinante:

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_1^{r-1} & a_2^{r-1} & \ldots & a_n^{r-1} \\ a_1^{n} & a_2^{n} & \cdots & a_n^{n} \\ a_1^{r+1} & a_2^{r+1} & \ldots & a_n^{r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Offenbar muss R theilbar sein durch D, also:

$$R = D.Q$$

wo Q nothwendig eine ganze Funktion der Elemente ist.

Bezeichnen wir mit $c_1\, c_2 \ldots c_n$ die einfachsten symmetrischen Funktionen der n Grössen a, also die mit abwechselnden Vorzeichen versehenen Koeffizienten der Gleichung, deren Wurzeln die a sind, so sehen wir deutlich, dass identisch sein muss:

$$\begin{gathered} a_1^n - c_1 a_1^{n-1} + c_2 a_1^{n-2} - \cdots + (-1)^n c_n = 0 \\ a_2^n - c_1 a_2^{n-1} + c_2 a_2^{n-2} - \cdots + (-1)^n c_n = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \end{gathered}$$

Wenn man daher die Werthe von $a_1^n\, a_2^n \ldots a_n^n$, die man hieraus erhält, in die Determinante R einführt, so ergiebt sich eine Determinante, deren Elemente in der $(r+1)$-ten Zeile Polynome sind, die mithin in ein Aggregat einer gewissen Anzahl Determinanten mit eingliedrigen Elementen zerfällt. Diese Determinanten sind, mit Ausnahme von einer, alle Null, weil sie zwei parallele identische Zeilen enthalten. Es verschwindet aber im Gegentheil die Determinante nicht, in der die r-ten Potenzen der a vorkommen.

Man erhält demnach

$$R = (-1)^{n-r-1} c_{n-r} D$$

Der Quotient: R getheilt durch D hat mithin den Werth $(-1)^{n-r-1} c_{n-r}$, stellt sich also dar als die Summe derjenigen Produkte der Grössen a, worin jedesmal $(n-r)$ von ihnen vereinigt sind.

§ 34. Determinanten, die aus Binomialkoeffizienten gebildet sind. Determinante von Zeipel.

Man erkennt leicht, dass die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \binom{m}{1} & \binom{m+1}{1} & \cdots & \binom{m+n}{1} \\ \binom{m+1}{2} & \binom{m+2}{2} & \cdots & \binom{m+n+1}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \binom{m+n-1}{n} & \binom{m+n}{n} & \cdots & \binom{m+2n-1}{n} \end{vmatrix}$$

den Werth 1 besitzt.

Denn zieht man von jeder Spalte die vorausgehende ab, so erhält man eine Determinante derselben Gestalt, aber von niederer Ordnung. Also wird unsere Determinante der ähnlichen von der zweiten Ordnung gleichkommen, nämlich:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \binom{m}{1} & \binom{m+1}{1} \end{vmatrix}$$

und diese ist gleich 1.

Desgleichen besitzt den Werth ± 1 die auf folgende Weise aus Binomialkoeffizienten gebildete Determinante:

$$\begin{vmatrix} \binom{m+n}{m} & \binom{m+n+1}{m} & \cdots & \binom{2m+n}{m} \\ \binom{m+n+1}{m} & \binom{m+n+2}{m} & \cdots & \binom{2m+n+1}{m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \binom{2m+n}{m} & \binom{2m+n+1}{m} & \cdots & \binom{3m+n}{m} \end{vmatrix}$$

Sie ist eine Determinante der Art, wie sie von Hankel untersucht wurden, und ihr Werth lässt sich mit Hilfe der Lehrsätze, die wir seiner Zeit abgeleitet haben, finden.

Die Determinante von Zeipel wird auf folgende Weise dargestellt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \binom{m}{p} & \binom{m}{p+1} & \cdots & \binom{m}{p+r} \\ \binom{m+1}{p} & \binom{m+1}{p+1} & \cdots & \binom{m+1}{p+r} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \binom{m+r}{p} & \binom{m+r}{p+1} & \cdots & \binom{m+r}{p+r} \end{vmatrix}$$

Zeipel, Om determinanter, hvars elementer äro Binomialkoëfficienter. Lunds Univ. Årsskr. t. 2. 1865 (Act. Univ. Lund. 1865. 3. Nr 2.) [1—68] S. 4 ff. Man sehe auch Günther, Det. 1877. S. 80 ff. Scott, Det. 1880. chap. 6. art. 21, 27—30.

Beachten wir, dass die Elemente der ersten Zeile zum gemeinsamen Faktor m haben und die Elemente der ersten Spalte desgleichen $(1:p)$.

Stellen wir diese Faktoren voran, so wird das erste Element

$$\binom{m-1}{p-1}.$$

So können wir die entsprechenden gemeinsamen Faktoren bei den Elementen der andern Zeilen auch loslösen und voransetzen, und gleicherweise bei den Spalten.

Es ergiebt sich demnach:

$$\Delta = \frac{m(m+1)\cdots(m+r)}{p(p+1)\cdots(p+r)} \begin{vmatrix} \binom{m-1}{p-1} & \cdots & \binom{m-1}{p+r-1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \binom{m+r-1}{p-1} & \cdots & \binom{m+r-1}{p+r-1} \end{vmatrix}$$

und der zweite Faktor ist hier wiederum eine Determinante genau derselben Form, wie die, von der wir ausgingen, mit dem einzigen Unterschiede, dass m in $(m-1)$ und p in $(p-1)$ verwandelt sind. Fahren wir mit dieser Behandlung fort und beachten, dass

$$\frac{m(m+1)\cdots(m+r)}{p(p+1)\cdots(p+r)} = \frac{\binom{m+r}{r+1}}{\binom{p+r}{r+1}}$$

so ergiebt sich zum Schluss:

$$\Delta = \frac{\binom{m+r}{r+1}}{\binom{p+r}{r+1}} \cdot \frac{\binom{m+r-1}{r+1}}{\binom{p+r-1}{r+1}} \cdots \frac{\binom{m+r-p+1}{r+1}}{\binom{r+1}{r+1}} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \binom{m-p}{0} & \cdots & \binom{m-p}{r} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \binom{m-p+r}{0} & \cdots & \binom{m-p+r}{r} \end{vmatrix}$$

Nun gewinnen wir für diese letztere Determinante aus unserer Erörterung zu Beginn dieses Paragraphen den Werth 1, also erscheint Δ einzig mittelst des vorher aufgezeichneten Ausdrucks in den Binomialkoeffizienten dargestellt.

Eine andere aus Binomialkoeffizienten gebildete Determinante ist von **Studnička** behandelt worden.

Es ist die folgende:

$$\begin{vmatrix} \binom{m}{1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{m}{2} & \binom{m}{1} & 1 & \cdots & 0 \\ \binom{m}{3} & \binom{m}{2} & \binom{m}{1} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 1 \\ \binom{m}{k} & \binom{m}{k-1} & \binom{m}{k-2} & \cdots & \binom{m}{1} \end{vmatrix}$$

ihr Werth ist

$$\binom{m+k-1}{k}.$$

Studnička, Notiz über einige Determinanten, in welchen Binomialkoeffizienten als Elemente auftreten. Böhm. Ges. Ber. Jahrg. 1879 N. 28 [292—295].

Noch eine weitere ähnliche Determinante behandelte Studnička, nämlich:

$$\begin{vmatrix} \binom{m}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{m}{3} & \binom{m-1}{2} & -2 & \cdots & 0 \\ \binom{m}{4} & \binom{m-1}{3} & \binom{m-2}{2} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & -(k+1) \\ \binom{m}{k+1} & \binom{m-1}{k} & \binom{m-2}{k-1} & \cdots & \binom{m-k+1}{2} \end{vmatrix}$$

Ihr Werth ist $k!\sum c_k$, wenn man unter $\sum c_k$ die Summe der Produkte zu je k Faktoren der Zahlen $1, 2, \ldots (n-1)$ versteht.

Studnička, Über eine neue Formel der Kombinatorik. Böhm. Ges. Ber. Jahrg. 1879 N. 29 [295—298].

Über diese aus Binomialkoeffizienten gebildeten Determinanten hat man, ausser den angeführten Arbeiten, noch einzusehen:

Janni, Nota sullo sviluppo di un determinante. (Eine gesondert erschienene kleine Schrift, vergl. Bull. di bibl. e di stor. Bonc. t. 11. 1878. S. 296.)

Stern, a. a. O. Siehe oben S. 130, Journ. f. Math. Bd. 66. S. 287 f.

Caldarera, Su talune proprietà dei determinanti, in ispecie di quelli a matrici composte con la serie dei numeri figurati. Giorn. di Batt. vol. 9 (1871) [223—232].

Bonolis, Sviluppi di alcuni determinanti. Giorn. di Batt. vol. 15 (1877) [113—134].

Stern fand neben Anderem diese Formel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \binom{x_1}{1} & \binom{x_2}{1} & \cdots & \binom{x_n}{1} \\ \binom{x_1}{2} & \binom{x_2}{2} & \cdots & \binom{x_n}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \binom{x_1}{n-1} & \binom{x_2}{n-1} & \cdots & \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix} = \frac{D}{2^{n-2}\cdot 3^{n-3}\cdot 4^{n-4}\cdots (n-1)^1}$$

wo D die Determinante Cauchys ausdrücken soll, diese aus den Grössen $x_1\, x_2 \ldots x_n$ zusammengesetzt. (Siehe § 33.)

§ 35. Die Zahlen Bernoullis und Eulers, durch Determinanten dargestellt.

Mit Hilfe von Determinanten, die aus Binomialkoeffizienten gebildet sind, kann man die sogenannten Bernoullischen und Eulerschen Zahlen darstellen.

Wir wollen setzen

$$\operatorname{tg} x = \sum_1^{\infty} \beta_{2m} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

$$\sec x = \sum_0^{\infty} E_{2m} \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

dann heissen die Zahlen:

$$B_{2m} = \frac{2m}{2^{2m}(2^{2m}-1)} \beta_{2m}\,, \qquad E_{2m}$$

beziehungsweise Bernoullische und Eulersche Zahlen.

Bedient man sich der Rekursionsformeln, die für solche Zahlen bestehen (Siehe des Verfassers Repertorium der höheren Mathematik I. Leipzig 1900. Kap. 18, § 3.), so kann man für sie eine Darstellung durch Determinanten finden.

Und zwar ergiebt sich:

$$\beta_{2m} = (-1)^{m-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \binom{3}{1} & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \binom{5}{1} & \binom{5}{3} & \cdots & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \binom{2m-3}{1} & \binom{2m-3}{3} & \cdots & 1 & 1 \\ \binom{2m-1}{1} & \binom{2m-1}{3} & \cdots & \binom{2m-1}{2m-3} & 1 \end{vmatrix}$$

$$E_{2m} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \binom{4}{2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \binom{6}{2} & \binom{6}{4} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 1 & \binom{2m-2}{2} & \binom{2m-2}{4} & \cdots & \binom{2m-2}{2m-4} & 1 \\ 1 & \binom{2m}{2} & \binom{2m}{4} & \cdots & \binom{2m}{2m-4} & \binom{2m}{2m-2} \end{vmatrix}.$$

Über diesen Gegenstand vergleiche man:

Scherk, Von den numerischen Coefficienten der Secantenreihe, ihrem Zusammenhange und ihrer Analogie mit den Bernoullischen Zahlen. Mathematische Abhandlungen. Berlin 1825. I. S. 1—30.

v. Staudt, De numeris Bernoullianis. Erlangen 1845.

Schlömilch, Neue Formeln zur independenten Bestimmung der Sekanten- und Tangentenkoeffizienten. Arch. d. Math. 16. Theil. (1851) [411—418].

Naegelsbach, Zur independenten Darstellung der Bernoullischen Zahlen. Zeitschr. f. Math. 19. Jahrg. (1874) [219—233] S. 227 ff.

Lucas, Théorie nouvelle des nombres de Bernoulli et d'Euler. Ann. di mat. ser. 2 t. 8 (1877) [56—79].

Günther, Det. 1877. S. 101 f.

Saalschütz, Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen. Berlin 1893.

Haussner, Zur Theorie der Bernoullischen und Eulerschen Zahlen. Ges. d. Wiss. Göttingen Nachr. 1893 [777—809].

Haussner, Independente Darstellung der Bernoullischen und Eulerschen Zahlen durch Determinanten. Zeitschr. f. Math. 39. Jahrg. (1894) [183—188].

Für dieselben Koeffizienten lässt sich auch eine Ausdrucksform angeben mittelst Determinanten, die aus Fakultäten gebildet sind, wie wir im folgenden Paragraphen zeigen wollen.

§ 36. Determinanten, aus Fakultäten gebildet.

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \cdots & \frac{1}{1!} \end{vmatrix}$$

hat den sehr einfachen Werth

$$\frac{1}{n!}$$

Hierüber kann man einsehen:

D'Ovidio, Due teoremi di determinanti. Giorn. di Batt. vol. 1 (1863) [135—139].

So wird auch:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots u_0 \\ 1 & 1! & 0 & 0 & \cdots u_1 \\ 1 & 2 & 2! & 0 & \cdots u_2 \\ 1 & 3 & 3.2 & 3! & \cdots u_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ 1 & n & n(n-1) & n(n-1)(n-2) & \cdots u_n \end{vmatrix} = \Delta^n u_0 \, 1!\,2!\,3! \cdots n!$$

indem man unter $\Delta^n u_0$ die Differenz n-ter Ordnung der $(n+1)$ Grössen $u_0\, u_1 \ldots u_n$ versteht.

Janni, Algebra. Napoli 1876. S. 23.

Mit Hilfe von Determinanten aus Fakultäten lässt sich noch eine Darstellung der im vorausgehenden Paragraphen besprochenen Zahlen Bernoullis und Eulers geben. Man erhält:

$$E_{2m} = (2m)! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \cdots 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 1 & \cdots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ \frac{1}{(2m)!} & \frac{1}{(2m-2)!} & \frac{1}{(2m-4)!} & \cdots \frac{1}{2!} \end{vmatrix}$$

$$B_{2m} = (-1)^{n+1}(2m)! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \cdots 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \cdots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ \frac{1}{(2m+1)!} & \frac{1}{(2m)!} & \frac{1}{(2m-1)!} & \cdots \frac{1}{2!} \end{vmatrix}$$

Man sehe:

Glaisher, Expressions for Laplaces coefficients, Bernoullian and Eulerian numbers as determinants. (Mit Fortsetzungen unter dem Titel: On a class of determinants) Mess. of math. vol. 6 (1877) [49—63], vol. 7 (1878) [160—165], vol. 8 (1879) [158—167].

§ 37. Determinanten aus Wurzeln der Einheit, besondere Systeme.

Es sei eine zyklische Determinante vorgelegt, gebildet aus den n-ten Wurzeln der Einheit (n als Primzahl gedacht). Ist α eine n-te Einheitswurzel und r eine sogenannte primitive Wurzel der Zahl n, so sind:

$$\alpha \;\alpha^r \;\alpha^{r^2} \cdots \alpha^{r^{n-1}}$$

die sämmtlichen n verschiedenen Wurzeln der Einheit.

Wir bilden die Determinante:

$$A = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^r \cdots \alpha^{r^{n-2}} \\ \alpha^r & \alpha^{r^2} \cdots \alpha \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \alpha^{r^{n-2}} & \alpha \;\cdots \alpha^{r^{n-3}} \end{vmatrix}$$

Diese Determinante ist von Stern untersucht worden.

Stern a. a. O. Siehe oben S. 73, Journ. f. Math. Bd. 73 (1871) S. 378 ff.

Setzen wir

$$\alpha = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$$

so findet sich der Werth der Determinante A gleich

$$-\left(\frac{k}{n}\right) n^{\frac{n-2}{2}}$$

wenn

$$n = 4m + 1$$

oder gleich

$$-\left(\frac{k}{n}\right) i n^{\frac{n-2}{2}}$$

wenn

$$n = 4m + 3.$$

Wir betrachten nun Determinanten, die einzig aus den Elementen 1 und -1 zusammengesetzt sind.

Die folgende

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & +1 & +1 & \cdots & +1 \\ -1 & -1 & \cdots & +1 & +1 & +1 & \cdots & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ +1 & -1 & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & +1 \end{vmatrix}$$

ist eine zyklische Determinante, in der p Elemente $(p < \frac{1}{2}n)$ der ersten Zeile den Werth -1 haben und die übrigen $(n - p)$ gleich $+1$ sind.

Sie wurde erörtert von Catalan, und ihr Werth ist:

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-3)} 2^{n-1} (n - 2p)$$

Catalan, Recherches sur les déterminants. Acad. de Belg. Bull. t. 13. 1e partie. (1846) [534—555].

Nehmen wir $p = 1$ an und setzen die letzte Zeile an die zweite Stelle, die vorletzte an die dritte ..., so erhalten wir die Determinante:

$$C_n = \begin{vmatrix} -1 & +1 & \cdots & +1 \\ +1 & -1 & \cdots & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ +1 & +1 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

worin alle Elemente gleich 1 sind mit Ausnahme derer der Hauptdiagonale, die den Werth -1 erhalten.

In einem Aufsatze von Fouret wird diese Determinante unter der Bezeichnung C_n nach zwei anderen behandelt, die beziehungsweise A_n, B_n heissen:

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$B_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

In der ersteren sind alle Elemente gleich 1 mit Ausnahme der $(n-1)$ letzten in der Hauptdiagonale und diese gleich Null, in der zweiten sind alle ausserhalb der Hauptdiagonale befindlichen Elemente gleich 1 und in der Hauptdiagonale stehen nur Null-Elemente.

Fouret, Sur un mode de transformation des déterminants. Bull. soc. math. de Fr. t. 14. 1885—1886 (1886) [146—151].

Fouret, Remarque sur certains déterminants numériques. Bull. soc. math. de Fr. t. 15. 1886—1887 (1887) S. 146 f.

Wenn man in A_n von der ersten Spalte die zweite abzieht, so ergiebt sich:

$$A_n = -A_{n-1}$$

und setzt man dasselbe Verfahren fort, schliesslich:

$$A_n = (-1)^{n-1}$$

Wenn man bei der zweiten Determinante die übrigen $(n-1)$ Spalten zur ersten addiert, so erhält man:

$$B_n = (n-1)\,A_n$$

und daraus weiterhin:

$$B_n = (n-1)(-1)^{n-1}$$

Und fügt man schliesslich in C_n zu allen andern Spalten die erste hinzu, so ergiebt sich:

$$C_n = -2^{n-1}B_{n-1}$$

mithin:

$$C_n = (-1)^{n-1}2^{n-1}(n-2)$$

Man kann die Determinante C_n, wie es Fouret gethan hat, zu dem Nachweis der folgenden geschmackvollen Umwandlung einer Determinante benutzen.

Es sei eine Determinante der Ordnung m ($m \geqq n$) gegeben.

Wir wählen n Spalten aus und innerhalb der dadurch ausgezeichneten Matrix ziehen wir von den Elementen einer jeden Spalte die entsprechenden Elemente der andern ab. Die neue Determinante, die dabei entsteht, kommt der ursprünglichen, wenn diese erst mit $-(n-2)2^{n-1}$ multipliziert wird, gleich.

Es lässt sich wirklich die neue Determinante als Produkt der vorgelegten und des Faktors $(-1)^n C_n$ ansehen, wenn man dieser letzteren in passender Weise Zeilen und Spalten hinzufügt, so dass man sie zur Ordnung m überführt, wenn man nämlich schreibt:

$$(-1)^n C_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -1 & -1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Da man den Werth von C_n kennt, erscheint danach der Lehrsatz erwiesen.

Eine weit allgemeinere Determinante, als die C_n, ist die folgende, welche von Studnička erörtert worden ist.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Für sie ergiebt sich als Werth 2^{n-1}.

Studnička, Über eine neue Determinanteneigenschaft. Böhm. Ges. Ber. Jahrg. 1880. N. 7 [50—54].

Im Zusammenhang mit diesen Determinanten können wir gewisse andere hier betrachten, die Roberts (Nouv. ann. 2. ser. t. 3. S. 139 f.) vorgelegt hat, nämlich solche wie:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \alpha_n \end{vmatrix}.$$

Man lese darüber:

Ferrara, Soluzione della questione 694 dei Nouvelles Annales. Giorn. di Batt. vol. 2. (1864) S. 95 f.

Torelli, Soluzione della questione 694 dei Nouvelles Annales. Giorn. di Batt. vol. 2. (1864) S. 191.

Smet-Jamar, Question 694. Nouv. ann. 2. sér. t. 3 (1864) S. 395 f.

Diese Determinanten werden auf die vorangehende C_n zurückgeführt, wenn die α alle gleich -1 angenommen werden.

Der Werth dieser Determinante ist:

$$(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)\cdots(\alpha_n - 1) + \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_{n-1})} (\alpha_{i_1} - 1)(\alpha_{i_2} - 1)\cdots(\alpha_{i_{n-1}} - 1)$$

wobei $(i_1\, i_2 \ldots i_{n-1})$ auf jede mögliche Weise unter den Zahlen $1, 2, \ldots n$ ausgewählte $(n-1)$ Kennziffern vorstellen.

Wenn man an Stelle der Elemente 1 andere Elemente mit dem Werthe x einsetzt, so erhält man eine weit allgemeinere Determinante, die von Torelli (a. a. O.) behandelt wurde. Siehe auch

Cesàro, Corso di analisi algebrica. Torino 1894. S. 16.

Die folgende Determinante stellt einen noch höheren Grad der Allgemeinheit dar:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & \alpha_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & \alpha_3 & \cdots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & \alpha_n \end{vmatrix}$$

Sardi, Un teorema su' determinanti. Giorn di Batt. vol. 6 (1868) [357—360]. Siehe auch Capelli-Garbieri, Algebra. Padova 1886 S. 326.

Ihr Werth ist:

$$(\alpha_1 - x_1)(\alpha_2 - x_2)\cdots(\alpha_n - x_n) + \sum x_{i_n}(\alpha_{i_1} - x_{i_1})(\alpha_{i_2} - x_{i_2})\cdots(\alpha_{i_{n-1}} - x_{i_{n-1}})$$

Wenn die $\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_n$ die Form haben:

$$x_i + (x - A), \quad A = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

so erhalten wir dann das Ergebniss:

$$x(x - A)^{n-1}$$

Siehe Lucas, Sur une formule d'analyse, C. R. t. 70. janv.—juin 1870. S. 1167 f.

§ 38. Eine ganze Funktion von x wird in Form einer Determinante ausgedrückt.

Es lässt sich leicht nachweisen, dass die Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}$$

eine Darstellung des Polynoms ist:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

Man lese:

Günther, Über aufsteigende Kettenbrüche. Zeitschr. f. Math. 21. Jahrg. (1876) [178—191] S. 187. Desgleichen Günther, Det. 1877. S. 204.

Laisant, Sur un déterminant remarquable. Bull. soc. math. de Fr. vol. 17 (1889) [104—107].

Denn wirklich, entwickeln wir diese Determinante nach den Elementen ihrer ersten Spalte, so erhalten wir:

$$a_0 x^n + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}$$

und diese zweite Determinante hat die nämliche Gestalt, wie die, von der wir ausgegangen, ist jedoch von niedrigerer Ordnung. Bei Fortsetzung des angedeuteten Verfahrens wird die Behauptung erwiesen.

Zu demselben Ergebniss gelangt man, und sogar noch leichter, wenn man die Determinante nach den Elementen der ersten Zeile entwickelt.

Setzt man an Stelle der Elemente -1 Elemente $-y$ ein, so ergiebt sich eine binäre Form in x und y.

Eine verwandte Determinante betrachtet Mansion (Elemente der Theorie der Determinanten. Leipzig 1878. S. 17), nämlich:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Diese Determinante erhält man aus der vorangehenden D, wenn man $x = -1$ annimmt, die Determinante mit $(-1)^n$ multipliziert und einige von den ersten a gleich 1 setzt, die übrigen aber gleich Null.

Es findet sich dann, dass der Werth dieser Determinante Null oder auch 1 ist, weil er gleichkommt:

$$(-1)^n [1.(-1)^n + 1.(-1)^{n-1} + \cdots]$$

Mit einer Determinante von ziemlich ähnlicher Gestalt, die jedoch noch allgemeiner ist, beschäftigt sich Escherich.

Escherich, Bestimmung einer Determinante. Monatsh. f. Math. 3. Jahrg. (1892) S. 19 f.

An Stelle der x innerhalb der Hauptdiagonale setzen wir der Reihe nach $x_1\, x_2 \ldots x_n$ und an Stelle der -1 in gleicherweise geordneter Folge $-y_1, -y_2, \ldots -y_n$, dann entsteht die von Escherich erörterte Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ -y_1 & x_1 & \cdots & 0 \\ 0 & -y_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

Diese Determinante wird gleich dem Ausdruck:

$$a_0 x_1 \cdots x_n + a_1 y_1 x_2 \cdots x_n + a_2 y_1 y_2 x_3 \cdots x_n + \cdots$$

§ 39. Die Summen gleicher Potenzen der Wurzeln in der Form von Determinanten.

Es sei die Gleichung vorgelegt:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Man weiss, dass bei Einführung der Bezeichnungen $s_1\, s_2 \ldots s_m$ $(m \leqq n)$ für die Summen der gleichen Potenzen der Wurzeln dieser Gleichung die (nach Newton benannten) Beziehungen Geltung haben:

$$\begin{aligned} &a_0 s_1 + a_1 = 0 \\ &a_0 s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 = 0 \\ &a_0 s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3a_3 = 0 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 2a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 3a_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m-2} & a_{m-3} & a_{m-4} & \cdots & a_0 & (m-1)a_{m-1} \\ a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \cdots & a_1 & m\,a_m \end{vmatrix}$$

Wenn wir die erste Spalte mit s_1 multiplizieren, die zweite mit s_2 und so fort, die $(m-1)$-te mit s_{m-1} und zu der m-ten Spalte addieren, so werden in dieser die $(m-1)$ ersten Elemente, in Folge der Newtonschen Formeln, gleich Null und das letzte Element wird $-a_0 s_m$. Die Entwicklung der Determinante schränkt sich also auf das Produkt der Hauptelemente ein, weil alle Elemente auf der einen Seite der Hauptdiagonale verschwinden, und man erhält demzufolge als Werth dieser Determinante

$$-a_0^m s_m$$

Es erscheint also, abgesehen vom Faktor a_0^m, unter der Form einer Determinante die Summe s_m der m-ten Potenzen der n Wurzeln der vorgelegten Gleichung. $(m \leqq n)$

Einige Erörterungen über Determinanten dieser Gestalt findet man bei:

Vito Eugenio, Considerazioni intorno a taluni determinanti particolari. Giorn. di Batt. vol. 8 (1870) [285—290].

Günther, Det. 1877 S. 110 f.

Janni, V., Sopra una formola di Waring. Acc. di Napoli, Rendic. anno 17 (1878) [27—31].

Garbieri in dessen Bericht über das Lehrbuch der Determinanten-Theorie von Günther. 2. Aufl. 1877. Bull. di bibl. e di stor. Bonc. t. 11. 1878 [257—318] S. 303 f.

§ 40. Determinanten, die von dem Werthe gewisser Elemente unabhängig sind.

Beachtung verdient die folgende Determinante n-ter Ordnung, die von Dostor behandelt worden ist,

$$D = \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ -a & a & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a & -a & a & \cdots & a_{3n} \\ . & . & . & \cdots & . \\ -a & -a & -a & \cdots & a \end{vmatrix}\,.$$

wo die Elemente der ersten Zeile sämmtlich gleich a sind, desgleichen die in der Hauptdiagonale befindlichen.

Die Elemente unterhalb der letzteren sind aber alle gleich $-a$ und die übrigen Elemente $a_{23} \ldots a_{2n} \ldots a_{3n} \ldots$ sind ganz beliebig. Von den Werthen dieser letztgenannten Elemente ist die Determinante unabhängig. Und wirklich lässt sich zeigen, dass das Komplement eines jeden dieser Elemente Null ist.

Wir können demnach den Werth der Determinante berechnen, indem wir alle die Elemente $a_{23} \ldots a_{2n} \ldots$ gleich Null setzen, und dann findet sich:

$$D = 2^{n-1}a^n.$$

Dostor, Propriété des déterminants. Arch. d. Math. 56. Theil (1874) [238—240].

§ 41. Determinanten gebrochener Funktionen.

Man nennt Determinanten gebrochener Funktionen solche, die in der Gestalt auftreten:

$$A_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

Sie führen diesen Namen, weil mit ihrer Hilfe, wie sich ohne Weiteres zeigen lässt, die Koeffizienten der rationalen gebrochenen Funktionen oder der Bruchfunktionen ausdrückbar sind.

Wenn wir solche Determinanten nach den Elementen der ersten Spalte entwickeln, erhalten wir sogleich die folgende Rekursionsformel

$$A_n = a_1 A_{n-1} - a_2 A_{n-2} + a_3 A_{n-3} - \cdots \pm a_n$$

Setzen wir jetzt

$$a(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

so lässt sich leicht darthun, dass $[1 : a(x)]$ gleich ist

$$A(x) = 1 - A_1 x + A_2 x^2 - A_3 x^3 + \cdots$$

wobei die A die Gestalt der oben niedergeschriebenen Determinante haben.

Multiplizieren wir nämlich $a(x)$ mit $A(x)$, so ergiebt sich:

$$A(x) . a(x) = 1 - (A_1 - a_1)x + (A_2 - A_1 a_1 + a_2)x^2 + \cdots$$

und da nach der Rekursionsformel auf der rechten Seite sämmtliche Koeffizienten verschwinden, so erhalten wir einfach:

$$A(x) . a(x) = 1$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

Wegen dieser und anderer ähnlicher Betrachtungen lese man

Dietrich, Über den Zusammenhang gewisser Determinanten mit Bruchfunktionen. Journ. f. Math. Bd. 69 (1868) [190—196].

§ 42. Die Determinante von Smith.

Wir betrachten die folgende Determinante, die ihren Namen nach Smith erhalten hat,

$$D = \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & \cdots & (1,n) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (n,1) & (n,2) & \cdots & (n,n) \end{vmatrix}$$

Hier ist unter

$$(i, j)$$

der grösste gemeinschaftliche Theiler der beiden Zahlen i, j zu verstehen.

In der Zahlentheorie bezeichnet man mit dem Symbol $\varphi(n)$ die Anzahl der Zahlen, welche kleiner sind als n und dabei zu n relativ prim, und bekanntlich ist der Werth der Summe

$$\sum_m \varphi(m) ,$$

wenn die Summation sich auf alle Zahlen m erstreckt, die Theiler von n sind, gleich n, also

$$\sum_m \varphi(m) = n$$

Daher lässt sich der grösste gemeinschaftliche Theiler (i, j) zweier Zahlen i, j in der Form einer Summation darstellen über eine Anzahl von $\varphi(m)$, ausgedehnt auf alle m, die gemeinschaftliche Theiler der beiden Zahlen i, j sind. Wir können nämlich schreiben:

$$(i,j) = a_{i1}a_{j1}\varphi(1) + a_{i2}a_{j2}\varphi(2) + \cdots + a_{in}a_{jn}\varphi(n)$$

wobei a_{ik}, a_{jk} die Einheit oder Null darstellen, jenachdem k ein Theiler von i und j ist, oder nicht. Daher sind a_{ik}, a_{jk} Null, wenn $k > i$ oder aber $k > j$.

Danach stellt sich die Determinante der a_{ik} wie folgt dar:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 1 & 1 & 0 \cdots 0 \\ 1 & 0 & 1 \cdots 0 \\ . & . & . \; \cdots \; . \end{vmatrix}$$

und ihr Werth beträgt 1, weil alle Elemente auf einer Seite der Hauptdiagonale Null sind.

Da man die vorgelegte Determinante nun als das Produkt auffassen kann von

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ . & . & \cdots \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} a_{11}\varphi(1) & a_{12}\varphi(2) & \cdots & a_{1n}\varphi(n) \\ a_{21}\varphi(1) & a_{22}\varphi(2) & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \end{vmatrix}$$

und weil die erstere Determinante gleich 1 ist, die zweite gleich $1 . \varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(n)$, so ergiebt sich schliesslich der Werth der Determinante von Smith zu

$$\varphi(1)\ \varphi(2)\ \cdots\ \varphi(n)$$

Es giebt über so gestaltete Determinanten Untersuchungen von

Smith, On the value of a certain arithmetical determinant. Proc. Lond. math. soc. vol. 7 (1875—76) [208—212].

Mansion, Démonstration d'un théorème relatif à un déterminant remarquable. Acad. de Belg. Bull. (2) t. 46 (1878) [892—899].

Mansion, Généralisation d'un théorème de M. Smith. Ann. soc. sc. Brux. t. 2 (1878) [211—224]. Auszugsweise in Mansion, Sur la théorie des nombres. Gand 1878. § 3.

Catalan, Théorème de MM. Smith et Mansion. Nouv. corr. math. t. 4 (1878) [103—111].

Le Paige, Sur un théorème de M. Mansion. Nouv. corr. math. t. 4 (1878) [176—178].

Cesàro, Determinanti in aritmetica. Giorn. di Batt. vol. 23 (1885) [182—197].

Cesàro, Considérations nouvelles sur le déterminant de Smith et Mansion. Ann. de l'éc. norm. 3e sér. t. 2 (1885) [425—435].

§ 43. Determinanten aus Differenzen.

Es sei eine Reihe von Grössen

$$a_1 \; a_2 \; a_3 \; \ldots \; a_n \; a_{n+1} \; \ldots$$

vorgelegt.

Man bilde die ersten Differenzen

$$\Delta_1^{(1)} \; \Delta_2^{(1)} \; \Delta_3^{(1)} \; \ldots \; \Delta_n^{(1)} \; \ldots$$

danach die zweiten, die dritten und so fort, also die Reihen:

$$\begin{matrix} \Delta_1^{(2)} & \Delta_2^{(2)} & \Delta_3^{(2)} & \ldots & \Delta_n^{(2)} & \ldots \\ \Delta_1^{(3)} & \Delta_2^{(3)} & \Delta_3^{(3)} & \ldots & \Delta_n^{(3)} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots \\ \Delta_1^{(n-1)} & \Delta_2^{(n-1)} & \Delta_3^{(n-1)} & \ldots & \Delta_n^{(n-1)} & \ldots \end{matrix}$$

und man setze voraus, dass diese letzte Reihe nur eine Konstante von dem Werthe C enthält.

Bildet man mit den ersten n Spalten aus dem Schema der vorstehend verzeichneten n Zeilen eine Determinante, so wird diese ihrem absoluten Werthe nach der n-ten Potenz der Konstanten C gleich sein.

Siehe Raimondi, Un teorema sui determinanti di differenze. Giorn. di Batt. vol. 26 (1888) [185—188].

Dieser Satz ist (der Meinung des genannten Schriftstellers entgegen, der ihn anscheinend für neu ansah) seit lange bekannt, ist er doch derselbe, den wir bei Gelegenheit der Hankelschen Determinante (Siehe S. 69) besprochen haben.

Eine andere Art der Differenzendeterminante haben wir schon auf S. 40 f. behandelt und zu ihr bildet die hier betrachtete Determinante wiederum einen besonderen Fall.

Es möge die Reihe der n Grössen

$$a_1, \; a_2, \; \ldots \; a_n$$

vorgelegt sein und dazu die Reihen ihrer ersten, zweiten ... Differenzen gebildet werden. Die Anfangsglieder dieser Reihen sind:

$$a_1, \Delta a_1, \Delta^2 a_1, \ldots \Delta^{n-1} a_1$$

Dem entsprechend gehört zu der Reihe der n Grössen

$$b_1, b_2, \ldots b_n$$

die Reihe

$$b_1, \Delta b_1, \Delta^2 b_1, \ldots \Delta^{n-1} b_1$$

und dasselbe Verfahren der Zuordnung lässt sich für Elemente $c, d, \ldots$ wiederholen. Es besteht dann die Determinantengleichung:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & \Delta a_1 & \Delta^2 a_1 & \ldots & \Delta^{n-1} a_1 \\ b_1 & \Delta b_1 & \Delta^2 b_1 & \ldots & \Delta^{n-1} b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{vmatrix}$$

Setzen wir aber

$$\begin{aligned} a_2 &= b_1 \\ a_3 &= b_2 = c_1 \\ a_4 &= b_3 = c_2 = d_1 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

so erhalten wir im Besonderen die vorhin besprochenen Determinanten wieder. Allgemeinere Sätze, die sich im Anschluss hieran von Determinanten aussprechen lassen, lese man auf S. 41.

Der Übergang, der sich von hier aus zu Determinanten machen lässt, wie sie in § 34 vorkamen, ist dort angedeutet; überdies vergleiche man

Scott, Det. 1880. S. 20 und 81. Baltzer, Det. 1881. S. 27.

Raimondi behandelt a. a. O. eine Determinante, deren Elemente figurierte Zahlen sind.

§ 44. Besondere zyklische Determinanten.

Es ist vortheilhaft, hier auch der folgenden besonderen zyklischen Determinante Erwähnung zu thun:

$$\begin{vmatrix} p+q\ , & p+2q, & \cdots & p+nq \\ p+2q, & p+3q, & \cdots & p+q \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p+nq, & p+q\ , & \cdots & p+(n-1)q \end{vmatrix} .$$

Ihr Werth ist:

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} q^n \left\{ n\frac{p}{q} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} n^{n-2}$$

Für

$$p = 0, \quad q = 1$$

erhält man:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2}$$

Über diese Determinanten vergleiche man:

Cremona, Solution de la question 465. Nouv. ann. t. 19 (1860) [151—153]. Siehe wegen der Fragestellung dieselbe Zeitschrift Bd. 18 S. 117 und weiter die S. 73 angezeigte Note von Cremona.

Lemonnier, Calcul d'un déterminant. Bull. soc. math. de France. vol. 7 (1879) [175—177].

§ 45. Determinanten der Kettenbrüche. Kontinuanten.

Eine Determinante von der Form:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_n \end{vmatrix} = C_n$$

in der also alle Elemente Null sind, ausgenommen die der Hauptdiagonale, die beliebigen Grössen gleichgesetzt werden, und ausgenommen weiterhin die in den beiden der Hauptdiagonale benachbarten und parallel verlaufenden Linien enthaltenen Elemente, die auf der einen Seite sämmtlich gleich $+1$, auf der andern aber gleich -1 angenommen werden, heisst eine Kettenbruch-Determinante oder Kontinuante. (Muir.)

Man kann jedoch auch weit allgemeinere Kontinuanten in Betracht ziehen, wenn man nur zum Beispiel an Stelle der Elemente -1 oder der Elemente $+1$ beliebige Grössen $b_1 \ldots b_{n-1}$ einführt.

Wenn man jene Determinante nun nach den Produkten von Mi-

noren entwickelt, die innerhalb der ersten m Zeilen enthalten sind, so ergiebt sich:

$$C_n = C_m C'_{n-m} + C_{m-1} C'_{n-m-1},$$

wobei durch $C'_{n-\nu}$ die Kontinuante bezeichnet wird, deren Hauptelemente $a_{\nu+1} \dots a_n$ sind.

Hieraus erhalten wir bei $m = n - 1$ eine Rekursionsformel, der die Kontinuanten Genüge leisten, nämlich

$$C_n = a_n C_{n-1} + C_{n-2}$$

Wir wollen die Anzahl der Glieder berechnen, die eine allgemeine Kontinuante enthält.

Zunächst lässt sich leicht nachweisen, dass die Entwicklung der Kontinuante von gerader Ordnung auf eine Summe zurückzuführen ist, bestehend aus der Einheit und einer Reihe von Gliedern, wovon ein jedes eine gewisse gerade Anzahl der a mit dem Koeffizienten 1 zum Produkt vereinigt enthält, und wenn n ungerade ist, dieselbe Entwicklung auf die Summe von Produkten einer ungeraden Anzahl der a hinaus kommt. Und wirklich, bleibt dieses Gesetz bis zu den Kontinuanten $(n - 1)$-ter Ordnung erhalten, so wird es auch für die von n-ter Ordnung zu Recht bestehen, wie man aus der oben aufgestellten Rekursionsformel ersieht. Nun ergiebt sich eben für $n = 3$

$$C_3 = a_1 a_2 a_3 + a_3 + a_1$$

und für $n = 2$

$$C_2 = a_1 a_2 + 1$$

Daher wird das Gesetz stets giltig sein.

Hieraus leiten wir ab, dass, wenn man an Stelle aller a die Einheit setzt, jedes Glied der positiven Einheit gleich wird, und in Folge davon erhalten wir in jedem Fall eine ganze Zahl, die die Anzahl der Glieder der allgemeinen Kontinuante darstellt. Diese Zahl wird also durch die Determinante

$$c_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \cdots 0 \\ -1 & 1 & 1 \cdots 0 \\ 0 & -1 & 1 \cdots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdots \cdot \\ 0 & 0 & 0 \cdots 1 \end{vmatrix}$$

gegeben.

Die Rekursionsformel liefert für diese Determinante die Gleichungen:

$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$$

Die Zahlen c_n bilden also eine Folge von ganzen Zahlen, von

denen jede der Summe der beiden vorangehenden gleich ist. Diese Folge pflegt man die Reihe von Fibonacci zu nennen.

Lucas, Théorie des nombres. t. 1. Paris 1891. S. 457 ff.

Es lässt sich nun leicht erweisen, dass im Allgemeinen

$$c_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{n-k}{k}$$

wo $k = \frac{1}{2}n$ für den Fall: n gerade, oder aber $k = \frac{1}{2}(n-1)$ für den Fall: n ungerade.

Wenn nämlich dieses Gesetz bis zu $(n-1)$ seine Geltung bewahrt, das heisst, wenn:

$$c_{n-1} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots$$

$$c_{n-2} = \binom{n-2}{0} + \binom{n-3}{1} + \binom{n-4}{2} + \cdots$$

so erkennt man, bei Beachtung der identischen Beziehung

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m+1}{k},$$

leicht, dass auch für c_n dasselbe Bildungsgesetz giltig bleiben muss.

Die Determinanten dieses Paragraphen heissen Kontinuanten, weil sie in Beziehung zu den kontinuierlichen oder Kettenbrüchen stehen. Man sieht ja ohne Weiteres ein, dass:

$$a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ -1 & a_2 \end{vmatrix}}{a_2}.$$

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 \\ 0 & -1 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & 1 \\ -1 & a_3 \end{vmatrix}}$$

und so wird im Allgemeinen der Kettenbruch

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

gleich dem Quotienten zweier Kontinuanten, von denen die eine zu Hauptelementen die Elemente $a_1 \ldots a_n$ besitzt, die andere, im Nenner, die Hauptelemente $a_2 \ldots a_n$.

Zu demselben Ergebniss gelangt man, wenn man anstatt der oben eingeführten Kettenbrüche diese weit allgemeineren in Betracht zieht:

$$a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots + \cfrac{b_n}{a_n}}}$$

Ein solcher Kettenbruch ist gleich dem Quotienten der zwei Determinanten:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & a_2 & b_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad \text{von der Ordnung } n$$

und

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_3 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & a_3 & b_4 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & a_4 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad \text{von der Ordnung } (n-1).$$

Die letztere Determinante ist das Komplement des Elementes a_1 in der ersten.

Solche Determinanten sind Kontinuanten viel allgemeinerer Art, als die vorher betrachteten, und man wird leicht einsehen, dass sie mit entsprechenden Eigenschaften ausgestattet sind. Entwickelt man zum Beispiel die erste von ihnen, die wir A_n nennen werden, nach den Elementen der letzten Horizontalreihe, so ergiebt sich

$$A_n = a_n A_{n-1} + b_n A_{n-2}$$

Diese Rekursionsformel zeigt Ähnlichkeit mit der oben angeführten.

In einem der vorigen Paragraphen sahen wir, wie die Summe gleicher Potenzen der Wurzeln einer Gleichung sich in Gestalt einer Determinante darstellen lässt (Siehe § 39). Ist die gegebene Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

so ergiebt sich in der That:

$$(-1)^m a_0^m s_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ m a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

Setzen wir nun im Besonderen

$$a_3 = a_4 = \cdots = a_n = 0$$
$$a_0 = 1,$$

dann werden $(n - 2)$ Wurzeln der vorgelegten Gleichung gleich Null und die übrigen beiden sind Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + a_1 x + a_2 = 0 \quad .$$

Es wird demnach augenscheinlich s_m nur die Summe der m-ten Potenzen der zwei Wurzeln dieser quadratischen Gleichung und sein Ausdruck in der Form einer Determinante

$$(-1)^m s_m = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}}_{m-1} - 2a_2 \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}}_{m-2}$$

Man ersieht hieraus, dass s_m die Darstellung mittelst zweier **Kontinuanten** zulässt, wovon die eine $(m - 1)$-ter Ordnung, die andere $(m - 2)$-ter Ordnung ist.

Nimmt man $a_1 < 2a_2$ an und stellt dann die zwei (komplexen) Wurzeln der oben verzeichneten Gleichung in der Form auf:

$$x_1 = \sqrt{a_2}\,(\cos\alpha \pm i \sin\alpha),$$

so kann man hieraus die bemerkenswerthe Formel gewinnen:

$$\cos m\alpha = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha \end{vmatrix} .$$

Studnička, Eine neue Anwendung der Kettenbruch-Determinanten. Böhm. Ges. Ber. Jahrg. 1886 [3—6].

Eine andere Determinante, die man aus der vorangehenden ableitet, indem man für das erste Element $2 \cos \alpha$ an Stelle von $\cos \alpha$ einsetzt, hat ihrerseits den Werth

$$\frac{\sin m\alpha}{\sin \alpha}$$

Studnička, Beitrag zur Theorie der Potenz- und Kombinations-Determinanten. Böhm. Ges. Ber. Jahrg. 1897. I. N. 1 [1—20] S. 11.

Und dies entspricht der nachstehenden, schon von Jacob Bernoulli (Mém. de l'acad. de Paris 1702) gegebenen Formel:

$$\frac{\sin m\alpha}{\sin \alpha} = (2 \cos \alpha)^{m-1} - \binom{m-2}{1} (2 \cos \alpha)^{m-3} + \cdots$$

Man kann die Lehre von den Kettenbrüchen in der Weise aufbauen, dass man zum Ausgangspunkt der Betrachtung ihren Ausdruck mittelst der Determinanten wählt. Wir werden hier bei solchen Erörterungen nicht verweilen und jetzt über diesen Gegenstand nur noch eine bibliographische Anmerkung beifügen.

Die ersten, welche sich mit dem Stoff beschäftigt haben, waren

Sylvester, On a remarkable modification of Sturms theorem. Phil. Mag. ser. 4. vol. 5 (1853) [446—456].

Sylvester, On a fundamental rule in the algorithm of continued fractions. Phil. Mag. ser. 4. vol. 6 (1853) [297—299].

Ramus, Determinanternes Anvendelse til at bestemme Loven for de convergerende Bröker. Danske Forh. 1856 [106—119].

Spottiswoode, a. a. O. Journ. f. Math. Bd. 51 (1856) S. 374.

Painvin, Sur un certain système d'équations linéaires. Journ. de Math. (Liouv.) 2e sér. t. 3 (1858) [41—46].

Heine, Auszug eines Schreibens über die Laméschen Funktionen an den Herausgeber. Journ. f. Math. Bd. 56 (1859) [79—86] S. 80 f.

Thiele, Bemaerkninger om kjaedebrøker. Tidsskr. f. math. Tychsen. 2. Raekke. 5. Aarg. (1869) [144—146].

Günther, Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbrüchen in independenter Form. Erlangen 1873.

Von diesem letzteren Schriftsteller mag man mit Rücksicht auf weitere Bemerkungen und historische Hinweise das Kapitel 5 (Kettenbruchdeterminanten) in der zweiten Ausgabe seiner Theorie der Determinanten (Erlangen 1877) nachlesen.

Von Günther vergleiche man weiter die Aufsätze: Beiträge zur Theorie der Kettenbrüche. Arch. d. Math. 55. Theil (1873) [392—404] S. 397. — Über die allgemeine Auflösung von Gleichungen durch Kettenbrüche. M. A. Bd. 7 (1874) [262—268], endlich die Schrift: Günther, Beiträge zur Erfindungsgeschichte der Kettenbrüche, Weissenburg 1872.

Von demselben Gegenstande handelt auch:

Muir, A theorem in continuants. Phil. Mag. ser. 5. vol. 3 (1877) S. 137 f.

Muir, Extension of a theorem in continuants, with an important application. Phil. Mag. ser. 5. vol. 3 (1877) [360—366] die Benennung „Kontinuanten" betreffend Muir in einem Briefe an Sylvester, Americ. Journ. vol. 1 (1878) S. 344.

Eine Determinante von der Art der Kontinuanten ist in neuester Zeit von Mollame untersucht worden.

Mollame, Sviluppo del determinante

$$\begin{vmatrix} u & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & u & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & u & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u \end{vmatrix}$$

e relazioni notevoli che ne derivano. Riv. di mat. vol. 3 (1893) [47—53].

Man vergleiche auch Scott, Det. 1880. chap. 13 [169—179], Baltzer, Det. 1881. § 3, 11 und § 8, 3 sowie Pringsheim in Encycl. d. math. Wiss. I. A. 3. Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse. Art. 46.

§ 46—50. Über die Determinanten der orthogonalen Substitutionen.

§ 46. Allgemeine Eigenschaften.

Eine Determinante

$$| a_{ij} |$$

heisst Determinante einer orthogonalen Substitution oder kürzer orthogonale Determinante, wenn zwischen ihren Elementen die folgenden Beziehungen bestehen:

$$a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \cdots + a_{ni}^2 = 1$$
$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = 0$$

Die Elemente einer orthogonalen Determinante sind eben die Koeffizienten einer orthogonalen Substitution, das heisst einer Substitution, welche die besondere quadratische Form $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ unverändert lässt.

Die erste Eigenschaft, die unmittelbar aus dieser Begriffsbestimmung hervorgeht, ist in dem Satze enthalten:

Das Quadrat der Determinante einer orthogonalen Substitution ist die positive Einheit.

Es genügt nämlich, das Quadrat der Determinante nach der gewohnten Regel herzustellen, um zu finden, dass dann alle Elemente der Hauptdiagonale gleich 1 werden und alle übrigen Elemente verschwinden. Daher ergiebt sich der Werth einer orthogonalen Determinante stets zu ± 1.

Eine zweite grundlegende Eigenschaft ist folgende:

Das algebraische Komplement eines Elementes ist gleich dem Element selbst, multipliziert mit der Determinante.

Gehen wir nämlich von den Gleichungen aus:

$$\begin{array}{c} a_{11}a_{1i} + a_{21}a_{2i} + \cdots + a_{n1}a_{ni} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{1i}a_{1i} + a_{2i}a_{2i} + \cdots + a_{ni}a_{ni} = 1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{1n}a_{1i} + a_{2n}a_{2i} + \cdots + a_{nn}a_{ni} = 0 \end{array}$$

und bezeichnen beziehungsweise mit A_{ij} das algebraische Komplement von a_{ij}, multiplizieren dann diese Gleichungen der Reihe nach mit $A_{j1}\, A_{j2} \ldots A_{ji} \ldots A_{jn}$ und summieren, so ergiebt sich, wenn man die vorgelegte Determinante D nennt,

$$D \,.\, a_{ji} = A_{ji}$$

Man muss hierzu bedenken, dass die Summe der Produkte von Elementen einer Zeile in die algebraischen Komplemente der Elemente einer parallelen Zeile Null ist.

In der gewonnenen Formel ist unser Lehrsatz erwiesen.

Nach der begrifflichen Erklärung ist die Determinante einer orthogonalen Substitution eine solche, bei der die Quadratsumme der Elemente aus einer und derselben Spalte gleich 1 ist, die Summe der Produkte aus den Elementen einer Spalte in die homologen Elemente einer parallelen Spalte Null. Nun lässt sich aber zeigen:

Wenn diese Eigenschaft bezüglich der Spalten gilt, so bestätigt sie sich auch für die Zeilen, das heisst, zwischen den Elementen gelten auch diese Beziehungen:

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{in}^2 = 1$$
$$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \cdots + a_{in}a_{jn} = 0$$

Da nämlich allgemein

$$D \,.\, a_{ik} = A_{ik}$$

und hieraus sich ergiebt

$$D \,.\, a_{ik}a_{jk} = A_{ik}a_{jk}\,,$$

erhält man durch Summation aller dieser Gleichungen für $k = 1, 2, \ldots n$

$$D(a_{i1}a_{j1} + \cdots + a_{in}a_{jn}) = A_{i1}a_{j1} + \cdots + A_{in}a_{jn}$$

und der Ausdruck hier auf der rechten Seite hat den Werth D oder aber Null, jenachdem $j = i$ oder j verschieden von i ist.

Die im zweiten Lehrsatze ausgesprochene Eigenschaft lässt sich auf die Minoren beliebiger Ordnung ausdehnen.

Man kann den Satz erweisen:

Jeder Minor ist gleich seinem algebraischen Komplement multipliziert mit der gegebenen Determinante D.

Multipliziert man nämlich mit D alle Elemente eines Minor der Ordnung m, so erscheint derselbe mit D^m multipliziert. Indessen geht das Produkt eines jeden Elementes mit D in sein algebraisches Komplement über und daher erhält man den homologen Minor in der zur gegebenen reziproken Determinante. Dieser homologe Minor ist aber bekanntlich gleich dem algebraischen Komplemente des gegebenen Minor, multipliziert mit D^{m-1}. Aus der Gleichsetzung beider Ausdrücke geht unser Lehrsatz hervor.

Auch dieser weitere Lehrsatz ist noch bemerkenswerth:

Das Produkt zweier orthogonaler Determinanten ist wiederum eine orthogonale Determinante.

Und wirklich, wenn

$$| a_{ij} | = A, \quad | b_{ij} | = B$$

die zwei gegebenen orthogonalen Determinanten sind, so wird ihr Produkt

$$A . B = | a_{1i} b_{1j} + \cdots + a_{ni} b_{nj} |$$

Bilden wir aber nun die Quadratsumme der Elemente einer Zeile, so ergiebt sich

$$b_{1j}^2 \sum_i a_{1i}^2 + \cdots + b_{nj}^2 \sum_i a_{ni}^2 + 2 b_{1j} b_{2j} \sum_i a_{1i} a_{2i} + \cdots$$

und das ist gleich

$$\sum_j b_{1j}^2$$

also gleich 1.

Dem entsprechend erkennt man leicht, dass die Summe der Produkte, in denen die Elemente einer Zeile in die homologen Elemente einer andern multipliziert erscheinen, gleich Null ist. Daher ist $A . B$ eine orthogonale Determinante.

§ 47. Die Aufgabe von Cayley.

Bei der Beschäftigung mit orthogonalen Determinanten ist die folgende Untersuchung von besonderer Wichtigkeit.

Die n^2 Elemente sind durch $\frac{1}{2} n (n + 1)$ Gleichungen mit einander verbunden, daher bleiben unter ihnen unabhängige nur der Zahl nach:

$$n^2 - \tfrac{1}{2} n (n + 1) = \tfrac{1}{2} n (n - 1)$$

Wie können wir nun aber eine orthogonale Determinante aufstellen, in der die sämmtlichen Elemente durch $\frac{1}{2}n(n-1)$ unabhängige Grössen ihren Ausdruck finden? **Euler** und **Cauchy** haben als die Ersten sich mit der Nachforschung hierüber beschäftigt. Sie wurde jedoch im allgemeinen Sinne von **Cayley** durchgeführt.

Das von Cayley aufgefundene Ergebniss ist das folgende.

Wir betrachten eine **schiefe** Determinante von der Ordnung n, bei der sämmtliche Hauptelemente unter sich gleich sein sollen. Ihre Elemente mögen b_{ij} heissen und es sei

$$B = \begin{vmatrix} b & b_{12} & b_{13} \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b & b_{23} \cdots b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdots \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} \cdots b \end{vmatrix}$$

Da $b_{ij} = -b_{ji}$ ist, sind unter einander verschiedene Elemente vorhanden der Anzahl nach

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)+1$$

Bezeichnen wir mit B_{ij} das algebraische Komplement zu b_{ij} und bilden die Elemente

$$a_{ij} = \frac{2bB_{ij}}{B}$$

$$a_{ii} = \frac{2bB_{ii}-B}{B} = \frac{2bB_{ii}}{B} - 1$$

so lässt sich zeigen, dass die a die Elemente einer **orthogonalen** Determinante sind und diese gleich $+1$.

Wir stellen ein System von $3n$ Grössen auf:

$$\begin{matrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{matrix}$$

für das die Gleichungen bestehen:

$$x_i = b_{1i}z_1 + \cdots + b_{ni}z_n$$
$$y_i = b_{i1}z_1 + \cdots + b_{in}z_n$$

Bei der Annahme

$$b_{ij} = -b_{ji}$$
$$b_{ii} = b$$

ergiebt sich

$$x_i + y_i = 2bz_i$$

Multiplizieren wir die x der Reihe nach mit

$$B_{j1}\ B_{j2}\ \cdots\ B_{jn}$$

und summieren, indem wir die Beziehungen zwischen den b und den B berücksichtigen, so erhalten wir augenscheinlich:

$$B_{j1}x_1 + B_{j2}x_2 + \cdots + B_{jn}x_n = Bz_j$$

und entsprechend

$$B_{1j}y_1 + B_{2j}y_2 + \cdots + B_{nj}y_n = Bz_j$$

Wenn wir dann auf der rechten Seite in beiden Gleichungen an Stelle von Bz_j einsetzen

$$B\frac{x_j + y_j}{2b}$$

so wird

$$By_j = 2bB_{j1}x_1 + \cdots + (2bB_{jj} - B)x_j + \cdots + 2bB_{jn}x_n$$
$$Bx_j = 2bB_{1j}y_1 + \cdots + (2bB_{jj} - B)y_j + \cdots + 2bB_{nj}y_n$$

und führen wir die a ein, so ergiebt sich:

$$y_j = a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n$$
$$x_j = a_{1j}y_1 + \cdots + a_{nj}y_n$$

Wenn wir nun hier in die zweite Gleichung die Werthe der y aus der ersteren einsetzen und dann die Koeffizienten der x gleich Null annehmen, so erhalten wir:

$$a_{1j}^2 + a_{2j}^2 + \cdots + a_{nj}^2 = 1$$
$$a_{1j}a_{1i} + a_{2j}a_{2i} + \cdots + a_{nj}a_{ni} = 0$$

Hierdurch erweisen sich die a als Elemente einer orthogonalen Determinante. Wir können sogleich die Untersuchung dahin vervollständigen, dass wir für diese Determinante den Werth $+1$ aufzeigen.

Die Determinante der Grössen a lässt sich ja in der Form des Produktes:

$$\frac{1}{B^n}\cdot\begin{vmatrix} 2bB_{11} - B, & 2bB_{12} & \cdots & 2bB_{1n} \\ 2bB_{21} & 2bB_{22} - B, & \cdots & 2bB_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 2bB_{n1} & 2bB_{n2} & \cdots & 2bB_{nn} - B \end{vmatrix}$$

schreiben. Wir multiplizieren dessen zweiten Faktor mit der Determinante der b. Dabei haben wir zu beachten, dass

$$B_{i1}b_{j1} + \cdots + B_{ii}b_{ji} + \cdots + B_{in}b_{jn} = 0$$
$$B_{i1}b_{i1} + \cdots + B_{ii}b\ \ + \cdots + B_{in}b_{in} = B$$

woraus nach Multiplikation mit $2b$ und weil

$$b_{ji} = -b_{ij}$$

folgt:

$$2bB_{i1}b_{j1} + \cdots + (2bB_{ii} - B)b_{ji} + \cdots + B_{in}b_{jn} = Bb_{ij}$$
$$2bB_{i1}b_{i1} + \cdots + (2bB_{ii} - B)b + \cdots + B_{in}b_{in} = Bb$$

Es geht aus diesen Formeln hervor, dass, wenn man gedachtes Determinanten-Produkt nach Zeilen ausführt, man als Ergebniss erhält B^n, multipliziert mit der Determinante der b, also noch einmal multipliziert mit B. Es ergiebt sich daher im Ganzen B^{n+1}. Deshalb ist die oben, innerhalb der Produktdarstellung der Determinante $|a_{ij}|$ auftretende Determinante gleich B^n, mithin jene selbst gleich $+1$.

Auf diesem Wege erhält man eine orthogonale Determinante, deren Elemente sich rational darstellen lassen durch $\frac{1}{2}n(n-1)$ unabhängige Grössen, nämlich die b_{ij}. Die Grösse b kann man der Einfachheit wegen gleich 1 annehmen.

Bezüglich einer wichtigen Bemerkung, die Kronecker zu dieser Lösung des Problemes durch Cayley gemacht hat, kann man die vorletzte Seite einer Arbeit von Netto einsehen.

Netto, Über orthogonale Substitutionen. Act. math. Bd. 9 (1887) [295—300] S. 299 f.

Für $n = 2$ sind die Elemente der Determinante der a (wenn $b_{12} = -b_{21} = \lambda$ gesetzt wird)

$$\begin{matrix} \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} & \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \\ -\frac{2\lambda}{1+\lambda^2} & \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \end{matrix}$$

Wenn man für den Fall $n = 3$ ansetzt:

$$B = \begin{vmatrix} 1 & \nu & -\mu \\ -\nu & 1 & \lambda \\ \mu & -\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

so ergeben sich für die Elemente a die folgenden Werthe:

$$\begin{matrix} \frac{1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2}{B} & 2\frac{\nu+\lambda\mu}{B} & 2\frac{-\mu+\lambda\nu}{B} \\ 2\frac{-\nu+\lambda\mu}{B} & \frac{1+\mu^2-\nu^2-\lambda^2}{B} & 2\frac{\lambda+\mu\nu}{B} \\ 2\frac{\mu+\lambda\nu}{B} & 2\frac{-\lambda+\mu\nu}{B} & \frac{1+\nu^2-\lambda^2-\mu^2}{B} \end{matrix}$$

Die orthogonalen Determinanten treten im Besonderen bei geometrischen Fragen hervor und gerade für $n = 2$ zeigen sie sich bei der Verwandlung rechtwinkliger Koordinatenaxen in der Ebene von Bedeutung, sowie für $n = 3$ bei der entsprechenden Aufgabe für den Raum.

Wenn man ein System rechtwinkliger Axen in ein anderes, gleicherweise rechtwinkliges zu verwandeln hat, ohne den festen Anfangspunkt der Koordinaten zu ändern, so werden die Koeffizienten der Umwandlungsformeln genau die Elemente einer orthogonalen Determinante. In dieser Gestalt stellte sich unsere Aufgabe zum ersten Male Euler dar.

Die Aufgabe Cayleys kann auch in dieser Form ausgesprochen werden: Es soll mit Hilfe von $\frac{1}{2}n(n-1)$ Grössen ein Ausdruck für die Koeffizienten einer orthogonalen Substitution gefunden werden, einer Substitution also, die die besondere quadratische Form

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

unverändert lässt oder, wie man auch sagt, in sich selbst überführt.

Mit Rücksicht auf diese Auffassung ist die Aufgabe in dem Sinne erweitert worden, dass man an Stelle der vorausgehenden besonderen quadratischen Form eine allgemeine quadratische Form zu Grunde gelegt hat.

Mit dem Fall der ternären und quaternären Formen hat sich zuerst Hermite beschäftigt.

Hermite, Sur la théorie des formes quadratiques ternaires indéfinies. Journ. f. Math. Bd. 47 (1854) [307—312].

Hermite, Sur la théorie des formes quadratiques. Journ. f. Math. Bd. 47 (1854) premier mémoire [313—342] second mémoire [343—368].

Hermite, Remarques sur un mémoire de M. Cayley relatif aux déterminants gauches. Cambr. Dubl. math. Journ. vol. 9 (1854) [63—67].

Erweiterungen der gedachten Aufgabe sind ferner in den Aufsätzen behandelt:

Cantor, G., De transformatione formarum ternariarum quadraticarum Halle 1869. (Habilitationsschrift.)

Bachmann, Untersuchungen über quadratische Formen. Journ. f. Math. Bd. 76 (1873) [331—341].

Tannery, Sur les substitutions linéaires par lesquelles une forme quadratique ternaire se reproduit elle-même. Bull. sc. math. t. 11. sec. sem. (1876) [221—233].

Frobenius, Über lineare Substitutionen und bilineare Formen. Journ. f. Math. Bd. 84 (1878) [1—63].

Prym, Über orthogonale, involutorische und orthogonal-involutorische Substitutionen. Ges. d. Wiss. Göttingen, Abhandl. Bd. 38 (1892) [1—42].

Loewy, Sur les formes quadratiques définies à indéterminées conjuguées de M. Hermite. C. R. t. 123. juill.—déc. (1896) [168—171].

Loewy, Über bilineare Formen mit konjugirt imaginären Variablen. Nova Act. Leop. Bd. 71. Nr. 8 (1898) [379—446]. (Habilitationsschrift.)

Man vergleiche Meyer in Encycl. d. math. Wiss. I B 2. Invariantentheorie Art. 3.

Die Literatur über orthogonale Determinanten betreffend wollen wir die folgenden Arbeiten anführen:

Euler, Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile. Novi Comm. Petrop. t. 15 pro anno 1770 (1771) [75—106].

Euler, Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum. Novi Comm. Petrop. t. 20 pro anno 1775 (1776) [189—238] S. 217.

Cauchy, Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes. Exercices de mathématiques, quatrième année (1829) [140—160] = Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy. 2. sér. t. 9. Paris 1891 [174—195].

Jacobi, De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares in alias binas transformandis, quae solis quadratis variabilium constant; una cum variis theorematis de transformatione et determinatione integralium multiplicium. Journ. f. Math. Bd. 12 (1834) [1—69] S. 7. Wieder abgedruckt in Jacobi, Ges. Werke Bd. 3. Berlin 1884 [193—268].

Jacobi, Sulla condizione di uguaglianza di due radici dell' equazione cubica, dalla quale dipendono gli assi principali di una superficie del second' ordine. Journ. f. Math. Bd. 30 (1845) [46—50], wieder abgedruckt in Jacobi, Ges. Werke Bd. 3. Berlin 1884 [461—465].

Cayley, a. a. O. Siehe Literaturbericht auf S. 60. Journ. f. Math. Bd. 32 (1846).

Schlaefli, Über die Relation zwischen den neun Kosinus, durch welche die gegenseitige Lage zweier rechtwinkliger Koordinaten-Systeme bestimmt wird. Arch. d. Math. 13. Theil (1849) [276—281].

Sylvester, On the principles of the calculus of forms, part 1. sect. 1—6. Camb. Dubl. math. Journ. vol. 7 (1852) [52—97, 179—217].

Brioschi, Note sur un théorème relatif aux déterminants gauches. Journ. de math. (Liouv.) t. 19 (1854) [253—256].

Hesse, Neue Eigenschaften der linearen Substitutionen, welche gegebene homogene Funktionen des zweiten Grades in andere transformiren, die nur die Quadrate der Variabeln enthalten. Journ. f. Math. Bd. 57 (1860) [175—182]. Wieder abgedruckt in Hesse, Ges. Werke, München 1897 [489—496].

Schlaefli, Über invariantive Elemente einer orthogonalen Substitution, wenn dieselbe als Ausdruck einer Bewegung jeder Gruppe von Werthen der Variabeln aus dem identischen Zustande in den transformirten gefasst wird. Journ. f. Math. Bd. 65 (1866) [185—187].

Veltmann, a. a. O. Siehe Literaturbericht auf S. 60. Zeitschr. f. Math. 16. Jahrg. (1871) S. 523.

Siacci, Quistioni. Giorn. di Batt. vol. 10 (1872) S. 188.

Albeggiani, Sviluppo di un determinante ad elementi binomii ed applicazione alle questioni 1ª, 2ª, 3ª, 4ª. Giorn. di Batt. vol. 10 (1872) [279—293] S. 285 ff.

Siacci, a. a. O. Siehe Literaturbericht auf S. 107. Ann. di mat. ser. 2. t. 5. S. 302.

Voss, Zur Theorie der orthogonalen Substitutionen. M. A. Bd. 13 (1878) [320—374].

Stieltjes, Un théorème d'algèbre. Act. math. Bd. 6 (1885) S. 319 f.

Loria, Su una proprietà del determinante di una sostituzione ortogonale. Jorn. de sc. math. vol. 7 (1885) [129—132].

Netto, Über orthogonale Substitutionen. Act. math. Bd. 9 (1887) [295—300].

Voss, Über bilineare Formen. Ges. d. Wiss. Göttingen Nachr. (1887) [424—433].

Kronecker, Über orthogonale Systeme. Math. Mitth. Sitzber. Berlin 1890 [359—375, 389—395, 457—465, 567—579, 651—668] = Akad. Berlin Ber. 1890 [525—541, 601—607, 691—699, 873—885, 1063—1080].

Kronecker, Anwendung der Modulsysteme auf Fragen der Determinantentheorie. Journ. f. Math. Bd. 107 (1891) [254—261].

Netto, Anwendung der Modulsysteme auf eine Frage der Determinantentheorie. Journ. f. Math. Bd. 108 (1891) [144—146].

Igel, a. a. O. Monatsh. f. Math. 3. Jahrg. 1892. S. 60 f.

Netto, Zur Theorie der orthogonalen Determinanten. Act. math. Bd. 19 (1895) [105—114].

Man vergleiche überdies Scott, Det. 1880. chap. 11 [146—159]. Baltzer, Det. 1881. § 14 [183—216].

Im Folgenden werden wir noch verschiedene der wichtigeren Lehrsätze verzeichnen, die über orthogonale Determinanten aufgefunden worden sind.

§ 48. Der Lehrsatz von Brioschi.

Es seien die a_{ij} die Elemente einer orthogonalen Determinante $D\ (= \pm 1)$ und man bilde daraus die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} + x, & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + x & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} + x \end{vmatrix} = f(x)$$

Die Gleichung

$$f(x) = 0$$

ist eine reziproke Gleichung, die für ein ungerades n die Wurzel $x = -D$ besitzt und ausserdem keine reelle Wurzel und für ein gerades n und für $D = -1$ die Wurzeln $x = \pm 1$ und ausserdem keine reelle Wurzel. (Brioschi a. a. O. Siehe S. 164.)

Entwickeln wir nämlich $f(x)$ nach den Potenzen von x mit Hilfe der Anweisung, die wir früher mitgetheilt (Siehe § 11), so erkennen wir folgendes. Die Koeffizienten von x^k und x^{n-k} sind die Summen der Hauptminoren beziehungsweise der Ordnungen $(n - k)$ und k. Jeder Hauptminor von der Ordnung k hat zum Komplement einen Hauptminor der Ordnung $(n - k)$ und nach einem oben bewiesenen Satze, der sich auf orthogonale Determinanten bezieht, ist der eine von ihnen gleich dem anderen, multipliziert mit D. Also sind die Koeffizienten von x^k und x^{n-k} unter einander gleich abgesehen von einem Faktor $D\ (= \pm 1)$. Man erhält dann genau:

$$\frac{D \,.\, f(x)}{x^n} = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Wenn also die Gleichung x zur Wurzel hat, wird sie auch eine Wurzel $(1 : x)$ besitzen oder sie wird eine reziproke Gleichung sein.

Setzen wir in der letzten Gleichung

$$x = -D$$

so ergiebt sich, weil doch auch $(1 : x) = -D$ ist (da ja $D = \pm 1$)

$$f(-D) = (-1)^n D^{n-1} f(-D)$$

Ist n ungerade, so kann diese Gleichung nur befriedigt werden, wenn $f(-D)$ verschwindet, mithin wird dann $x = -D$ eine Wurzel von $f(x)$.

Ist n gerade und $D = -1$, so kann die nämliche Gleichung auch nur, wenn sich wieder dieselben Nebenumstände verwirklichen, bestehen, das heisst, es muss wiederum $f(-D)$ verschwinden. Dann wird also $-D = +1$ eine Wurzel von f sein. Und es wird dann auch $x = -1$ eine Wurzel von f sein, weil, setzen wir in der allgemeinen Gleichung oben

$$D = -1 \quad \text{und} \quad x = -1,$$

hervorgeht:

$$f(-1) = (-1)^{n-1} f(-1)$$

Daraus folgt aber für ein gerades n $f(-1) = 0$.

Nun erübrigt noch zu zeigen, dass alle die andern Wurzeln nicht reell sind.

Wir bilden das Produkt $f(x) f(-x)$. Hiezu setzen wir

$$\sum_j a_{ij}^2 = c_{ii}$$

$$\sum_j a_{ij} a_{kj} = c_{ik}$$

Gemäss den Eigenschaften der orthogonalen Determinanten ergiebt sich

$$c_{ii} = 1 \qquad c_{ik} = 0$$

wonach das Produkt in der Gestalt erscheint

$$\begin{vmatrix} 1 - x^2 & , (a_{12} - a_{21}) x, & \cdots (a_{1n} - a_{n1}) x \\ (a_{21} - a_{12}) x, & 1 - x^2 & , \cdots (a_{2n} - a_{n2}) x \\ \cdot & \cdot & \cdots \quad \cdot \\ (a_{n1} - a_{1n}) x, & (a_{n2} - a_{2n}) x, & \cdots \quad 1 - x^2 \end{vmatrix}$$

Dividieren wir durch x die Elemente aller Zeilen, so erhalten wir:

$$\frac{f(x) \cdot f(-x)}{x^n} = \begin{vmatrix} \left(\frac{1}{x} - x\right), & (a_{12} - a_{21}), & \cdots & (a_{1n} - a_{n1}) \\ (a_{21} - a_{12}), & \left(\frac{1}{x} - x\right), & \cdots & (a_{2n} - a_{n2}) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (a_{n1} - a_{1n}), & (a_{n2} - a_{2n}), & \cdots & \left(\frac{1}{x} - x\right) \end{vmatrix}$$

Wir bemerken, dass alle Hauptminoren innerhalb einer Determinante, die man aus der vorliegenden erhält, wenn man an Stelle der Hauptelemente Null einsetzt, durchgängig halbsymmetrische Determinanten sind und dass sie demzufolge gleich Null sind, sobald ihre Ordnungszahl ungerade, vollständige Quadrate aber, sobald die Ordnungszahl gerade ist. (Siehe § 16.)

Erinnert man sich der Anweisung zur Entwicklung dieser Determinante nach Potenzen von

$$\left(x - \frac{1}{x}\right) = \xi$$

so leuchtet hier ein, dass diese Entwicklung nur Glieder mit Potenzen $n, (n-2), (n-4) \cdots$ jenes Binomes enthalten wird, deren Koeffizienten Summen von Hauptminoren gerader Ordnung sind und folglich als Summen von Quadraten stets positiv ausfallen.

Die Entwicklung wird also diese Gestalt zeigen:

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^n + \left(x - \frac{1}{x}\right)^{n-2} A_2 + \cdots$$

wo $A_2\, A_4 \ldots$ positive Zahlen sind.

Für einen beliebigen reellen Werth von x wird mithin die linke Seite dieser Gleichung stets einen positiven Werth erhalten und wird daher nicht Null sein können oder wenigstens nur dann, wenn in ihr das letzte Glied den Faktor ξ enthält. Dies erfordert aber, dass A_n, der Koeffizient von ξ^0, verschwinde. Mithin muss entweder n eine ungerade Zahl sein oder aber, im Fall n als gerade angenommen würde, so müsste, wie dies oben auf andere Weise deutlich gemacht wurde, D der Werth -1 beigelegt werden.

In diesen Fällen gerade können einzelne von den Wurzeln mit Wurzeln der Gleichung

$$x - \frac{1}{x} = 0$$

zusammenfallen, nämlich die Wurzeln ± 1.

Und wirklich würde man nachweisen können, wenn $D = -1$ und n gerade, dass dann A_n, also

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} - a_{21} & \cdots \\ a_{21} - a_{12} & 0 & \cdots \\ . & . & \cdots \end{vmatrix}$$

gleich Null ist. Dies ergiebt sich hier aber auf mittelbare Weise aus den obigen Darlegungen, denn, wenn A_n von Null verschieden wäre, so würde $f(x).f(-x)$ keine reellen Wurzeln haben können, während wir doch wissen, dass für ein gerades n und für $D = -1$ dies Produkt sicher ± 1 zu Wurzeln hat.

§ 49. Lehrsätze von Siacci.

Es ist hier der rechte Ort, verschiedene Lehrsätze aus den oben (Siehe S. 107) angeführten Abhandlungen von Siacci vorzutragen, Determinanten betreffend, die aus den Elementen anderer Determinanten gebildet sind.

Wenn man die Elemente der Zeilen einer orthogonalen Determinante n-ter Ordnung, deren Werth $\varepsilon = \pm 1$ ist, der Reihe nach mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ multipliziert und dann mit den Elementen der Zeilen einer andern orthogonalen Determinante derselben Ordnung, die denselben Werth ε hat, additiv verbindet, nachdem diese Elemente gleicherweise mit $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ multipliziert sind, so erhält man die Elemente einer Determinante, die sich nicht ändert, wenn man die α und die β mit einander vertauscht.

Mögen die Elemente der ersteren Determinante a_{ik} heissen und b_{ij} die der zweiten.

Es wird bei gedachtem Verfahren die Determinante hervorgehen:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 a_{11} + \beta_1 b_{11}, & \cdots & \alpha_n a_{1n} + \beta_n b_{1n} \\ . & \cdots & . \\ \alpha_1 a_{n1} + \beta_1 b_{n1}, & \cdots & \alpha_n a_{nn} + \beta_n b_{nn} \end{vmatrix}$$

Zerlegen wir diese Determinante mit binomischen Elementen nach der bekannten Regel (Siehe § 2, 9), so erhalten wir eine Summe von Determinanten nach Art des folgenden Ausdrucks:

$$(-1)^s \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k} \beta_{i_{k+1}} \cdots \beta_{i_n} \begin{vmatrix} a_{1i_1} & \cdots & a_{1i_k} & b_{1i_{k+1}} & \cdots & b_{1i_n} \\ . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ a_{ni_1} & \cdots & a_{ni_k} & b_{ni_{k+1}} & \cdots & b_{ni_n} \end{vmatrix}$$

wobei durch $(i_1\, i_2 \ldots i_n)$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots n$ dargestellt wird. Eigentlich erscheinen die Spalten der Determinante nicht in der Reihenfolge, wie wir sie verzeichnet haben, sondern im Gegentheil der Art geordnet, dass die Ordnungszahlen $i_1\, i_2 \ldots i_n$ nach wachsender Grösse auf einander folgen. Wir haben deshalb den Faktor $(-1)^s$ vorangestellt, wobei s die Anzahl der Inversionen anzeigen soll, die innerhalb der Permutation $(i_1 \ldots i_n)$ vorkommen.

Wir entwickeln nun die vorher niedergeschriebene Determinante nach Produkten der Minoren, die in den ersten k Spalten enthalten sind, in ihre Komplemente. Ein jeder solcher Minor ist, gemäss den Eigenschaften orthogonaler Determinanten, gleich seinem Komplement innerhalb A oder B, beziehungsweise multipliziert mit ε, womit der gemeinsame Werth der beiden Determinanten A und B bezeichnet wird. Da $\varepsilon^2 = 1$, ergiebt sich also, dass der Werth der oben verzeichneten Determinante derselbe ist, wie für diese Determinante:

$$\begin{vmatrix} b_{1i_1} & \cdots & b_{1i_k} & a_{1i_{k+1}} & \cdots & a_{1i_n} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{ni_1} & \cdots & b_{ni_k} & a_{ni_{k+1}} & \cdots & a_{ni_n} \end{vmatrix}$$

Multiplizieren wir sie mit

$$(-1)^s\, \beta_{i_1} \cdots \beta_{i_k}\, \alpha_{i_{k+1}} \cdots \alpha_{i_n}$$

so erhalten wir augenscheinlich ein anderes Glied aus der Entwicklung unserer vollständigen Determinante mit binomischen Elementen und dies Glied wird, nach unseren Erörterungen, dem oben aufgezeichneten Gliede gleich werden, wenn darin die α mit den β vertauscht werden. Wir dürfen also behaupten, dass bei geeigneter Entwicklung obiger Determinante mit binomischen Elementen die Glieder der Entwicklung sich dergestalt zu zwei und zwei zusammenordnen lassen, dass man das eine von ihnen aus dem andern durch Vertauschung der α mit den β gewinnt. In Folge dessen ändert sich die ganze Determinante bei dieser Vertauschung nicht. Aus dieser Beweisführung entspringt auch der Satz:

Wenn die gegebenen orthogonalen Determinanten nicht beide den Werth ε besitzen, sondern die eine ε, die andere $-\varepsilon$ gleich kommt, dann ändert die aus ihnen hervorgehende Determinante bei Vertauschung der α mit den β ihr Zeichen.

Setzt man:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 1 \qquad \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = -1$$

und beachtet, dass dann bei Vertauschung der α und β jedes Element sein Zeichen wechselt, so ergiebt sich:

Wenn man von den Elementen einer orthogonalen Determinante ungerader Ordnung die einer andern abzieht, welche denselben Werth haben mag, so entsteht eine Determinante, deren Werth Null ist.

Und setzt man im Gegentheil

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 1 \qquad \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 1$$

so erhält man den Satz:

Wenn zu den Elementen einer orthogonalen Determinante von beliebiger Ordnung und dem Werthe $\varepsilon\,(=\pm 1)$ die einer andern orthogonalen Determinante von derselben Ordnung und dem Werthe $-\varepsilon$ hinzugefügt werden, so entsteht eine Determinante mit dem Werthe Null.

Auf ähnliche Art lässt sich der weitere Lehrsatz nachweisen:

Wenn zu den Hauptelementen einer orthogonalen Determinante ε von beliebiger Ordnung einmal die Grössen

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n$$

hinzugefügt werden, ein andres Mal die Grössen

$$\frac{1}{\alpha_1},\ \frac{1}{\alpha_2},\ \ldots\ \frac{1}{\alpha_n}$$

so ergeben sich zwei gleiche Determinanten, wenn

$$\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n = \varepsilon .$$

Denn entwickeln wir die erste Determinante nach den Produkten der $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, so wird ein beliebiges Glied dieser Entwicklung lauten (Siehe § 11)

$$\alpha_{i_1}\ \alpha_{i_2}\ \ldots\ \alpha_{i_k} . M$$

wo M derjenige Hauptminor der vorgelegten ursprünglichen Determinante ist, der weder Zeilen noch Spalten mit den Ordnungszahlen $i_1\ i_2 \ldots i_k$ enthält.

Auf Grund der Lehrsätze von Minoren orthogonaler Determinanten ergiebt sich, dass M gleich ist seinem Komplement, multipliziert mit ε (da doch ε den Werth der gegebenen Determinante vorstellt). Nun geht aber aus

$$\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n = \varepsilon$$

hervor:

$$\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k} = \frac{\varepsilon}{\alpha_{i_{k+1}} \ldots \alpha_{i_n}}$$

also können wir sagen, das oben verzeichnete Glied komme (insofern $\varepsilon^2 = 1$)

$$\frac{1}{\alpha_{i_{k+1}} \ldots \alpha_{i_n}} M'$$

gleich, wenn mit M' das Komplement von M bezeichnet wird. Indessen ist dies ein Glied der Entwicklung der zweiten dargestellten Determinante und somit erscheint unsere Behauptung erwiesen. Diese Lehrsätze werden in der oben (Ende des § 47) angeführten Arbeit von Albeggiani (auf Seiten 285—290) mittelst eines Verfahrens bewiesen, welches im Wesentlichen mit dem übereinstimmt, dessen wir uns hier bedient haben, das aber in seiner Form unnöthiger Weise mehr verwickelt ist.

Ein anderer Lehrsatz von Siacci ist der folgende:

Zu den Hauptelementen einer orthogonalen Determinante ε füge man die Einheit hinzu. In der so hergestellten Determinante R betrachte man das Komplement eines Hauptelementes und zwar heisse dies R_{kk}. Man wird dann die Beziehung gewinnen

$$R = (1 + \varepsilon) R_{kk}.$$

Denn entwickeln wir R auf gewohnte Art, nämlich als Summe all seiner Hauptminoren und der Einheit (Siehe § 11), so ergiebt sich

$$R = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i,j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} + \cdots + \varepsilon$$

wobei die Summierung überall auf alle Werthe der Zahlreihe $1, 2, \ldots n$ ausgedehnt verstanden werden soll.

Die rechte Seite der Gleichung lässt sich auch, wie folgt, umwandeln.

$$R = \left[1 + \sum_i{}' a_{ii} + \sum_{i,j}{}' \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} + \cdots\right]$$

$$+ \left[\varepsilon + a_{kk} + \sum_i \begin{vmatrix} a_{kk} & a_{ki} \\ a_{ik} & a_{ii} \end{vmatrix} + \cdots\right]$$

Man soll hier bei dem Symbol $\sum'$ daran denken, dass von den Werthen der Kennziffern i, j immer der Werth k ausgeschlossen sei, dergestalt, dass dann der erste Theil des rechtsseitigen Ausdruckes, den wir (A) nennen wollen, nichts andres ist, als die Entwicklung von R_{kk}.

Der zweite Theil, wir nennen ihn (B), ist nun, abgesehn von einem Faktor ε, gleich dem ersten.

Multiplizieren wir ihn nämlich mit ε, so ergiebt sich

$$1 + \varepsilon a_{kk} + \varepsilon \sum_i \begin{vmatrix} a_{kk} & a_{ki} \\ a_{ik} & a_{ii} \end{vmatrix} + \cdots$$

Nun ist gemäss den geläufigen Beziehungen zwischen den Minoren einer orthogonalen Determinante εa_{kk} gleich dem Komplement von a_{kk} innerhalb der gegebenen orthogonalen Determinante, also gleich dem letzten Gliede von (A) und so ist auch jedes der Produkte

$$\varepsilon \begin{vmatrix} a_{kk} & a_{ki} \\ a_{ik} & a_{ii} \end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2, \ldots k - 1, k + 1, \ldots n)$$

einem unter den Gliedern der vorletzten Summation in (A) gleich. Im Verfolg dieser Überlegung erkennt man, dass

$$\varepsilon(B) = (A)$$

oder auch

$$(B) = \varepsilon(A) = \varepsilon R_{kk}$$

und daraus geht die im Lehrsatz verzeichnete Formel hervor.

Hieraus ergiebt sich:

1. Wenn $\varepsilon = +1$, so sind sämmtliche Komplemente der Hauptelemente von R unter einander gleich und gleich $\frac{1}{2}R$.

2. Wenn $\varepsilon = -1$, so wird $R = 0$.

Dieser Lehrsatz, allerdings unter abweichender Form und mit anderer Beweisführung, findet sich bei Siacci (a. a. O. Ann. di mat. vol. 5. S. 302). Dagegen kommen bei Anwendung der nämlichen Darstellungsform noch Einzelheiten hiervon in einem neueren Aufsatze Nettos zur Sprache (a. a. O. Act. math. Bd. 19. S. 109 ff.).

Netto spricht diesen Lehrsatz bei Gelegenheit eines anderen Lehrsatzes von Stieltjes aus, zu dessen Erörterung wir nun übergehen wollen.

§ 50. Lehrsatz von Stieltjes.

Das Ergebniss unserer Untersuchung ist das folgende. Wenn wir zu den Hauptelementen einer orthogonalen Determinante ε die Einheit hinzufügen, so stellt sich eine Determinante R heraus, die mit einem beliebigen ihrer Hauptminoren R_{kk} von der Ordnung $(n-1)$ durch die Beziehung

$$R = (1+\varepsilon) R_{kk}$$

verbunden ist.

Wir wollen nun die entsprechende Untersuchung für einen Minor unternehmen, der kein Hauptminor R_{kk} ist.

Man erkennt leicht mittelst eines ähnlichen Verfahrens, wie wir es oben benutzt haben, dass

$$R_{kl} = -\varepsilon R_{lk}$$

Indessen erhält man vermöge der Eigenschaften der reziproken Determinanten (Siehe S. 33 f.), wenn man mit $R_{kk,ll}$ das Komplement von

$$\begin{vmatrix} a_{kk}+1 & a_{kl} \\ a_{lk} & a_{ll}+1 \end{vmatrix}$$

einen der Hauptminoren $(n-2)$-ter Ordnung bezeichnet,

$$\begin{vmatrix} R_{kk} & R_{kl} \\ R_{lk} & R_{ll} \end{vmatrix} = R \, . \, R_{kk,ll}$$

und daraus ergiebt sich die Formel:

$$R_{kl}^2 \varepsilon (1+\varepsilon)^2 = R\,[(1+\varepsilon)^2 R_{kk,ll} - R]$$

Es liefert nun diese Formel im Verein mit der früheren das Ergebniss:

Ist $\varepsilon = +1$, dann werden, wenn $R = 0$, auch alle seine Minoren der Ordnung $(n-1)$ gleich Null sein.

Und zwar ist dieser Satz nur ein besonderer Fall des Lehrsatzes, den Stieltjes ohne Beweis in Bd. 6 der Acta math. gegeben, der in seiner allgemeineren Fassung folgendermaassen auszusprechen ist:

Es seien a_{ij}, b_{ij} die Elemente zweier orthogonalen Determinanten vom Werthe $\varepsilon = +1$, dann werden, wenn die Determinante mit dem allgemeinen Elemente

$$a_{ij} + b_{ij}$$

verschwindet, auch alle ihre Minoren der Ordnung $(n-1)$ verschwinden.

In dieser allgemeinen Form ist der Lehrsatz durch Netto (a. a. O. Act. math. Bd. 9 und 19) bewiesen worden.

Wir wollen jetzt sehen, wie man den allgemeinen Satz aus dem schon erwiesenen besonderen Falle heraus ableiten kann.

Bilden wir das Produkt von

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11}, & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} + b_{n1}, & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{vmatrix}$$

und

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = 1$$

Wenn man an die Beziehungen zwischen den Elementen einer orthogonalen Determinante denkt, so ergiebt sich:

$$R = D.B = \begin{vmatrix} \sum\limits_i a_{1i}b_{1i} + 1, & \sum\limits_i a_{1i}b_{2i}, & \cdots & \sum\limits_i a_{1i}b_{ni} \\ \sum\limits_i a_{2i}b_{1i}, & \sum\limits_i a_{2i}b_{2i} + 1, & \cdots & \sum\limits_i a_{2i}b_{ni} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \sum\limits_i a_{ni}b_{1i}, & \sum\limits_i a_{ni}b_{2i}, & \cdots & \sum\limits_i a_{ni}b_{ni} + 1 \end{vmatrix}$$

und diese Determinante R wird, da $B = 1$ ist, ihrerseits der Determinante D gleichkommen. Die zuletzt verzeichnete Determinante R hat nun die Gestalt unserer Determinante R, wie sie in den vorausgehenden Betrachtungen vorkam, da eine Determinante, die man aus ihr ableiten würde durch Subtraktion der Einheit von ihren Hauptelementen, nichts andres ist, als das Produkt der beiden vorgelegten Determinanten A, B und daher bekanntlich auch wiederum eine orthogonale Determinante. (Siehe S. 159.)

Machen wir die Annahme $D = 0$, so ist die letztere Determinante R auch Null und daher werden nach dem vorangehenden Lehrsatze alle ihre Minoren der Ordnung $(n - 1)$ verschwinden.

Betrachten wir nun zum Beispiel den Minor, der Komplement des ersten Elementes in D ist. Wir dürfen ihn schreiben:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} + b_{21}, & a_{22} + b_{22}, & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} + b_{n1}, & a_{n2} + b_{n2}, & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{vmatrix}$$

Mit B multipliziert liefert er:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ \sum_i a_{2i}b_{1i}, & \sum_i a_{2i}b_{2i}+1, & \cdots & \sum_i a_{2i}b_{ni} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \sum_i a_{ni}b_{1i}, & \sum_i a_{ni}b_{2i}, & \cdots & \sum_i a_{ni}b_{ni}+1 \end{vmatrix}$$

Entwickeln wir hier nach den Elementen der ersten Zeile, so erhalten wir eine Summe von Produkten, in denen diese Elemente mit Minoren von R der Ordnung $(n - 1)$ verbunden erscheinen, und daher verschwindet, wenn $D = 0$ ist, auch diese letzte Determinante. In Folge dessen ist der von uns herausgehobene Minor von D gleich Null. Hiermit erscheint der Lehrsatz von Stieltjes erwiesen.

Dieser Satz ist übrigens ein besonderer Fall eines schon von Frobenius (Journ. f. Math. Bd. 84. 1878) ausgesprochenen Satzes. Man vergleiche

Voss, Über die cogredienten Transformationen einer bilinearen Form in sich selbst. Akad. München. Abh. Bd. 17 1890—91 (1892) [237—356] S. 255 ff.

Muth, Theorie und Anwendung der Elementartheiler. Leipzig 1899. S. XII f. Anm.

§ 51. Determinanten, deren Ordnung unendlich ist.

Es ist noch nicht lange her, dass man Determinanten von der Ordnung unendlich in Betracht genommen hat, Determinanten also, die mit einer unendlichen Zahl von Zeilen und Spalten gebildet sind.

Einen Anfang in dieser Richtung der Forschung bezeichnet der Aufsatz:

Kötteritzsch, Über die Auflösung eines Systemes von unendlich vielen linearen Gleichungen. Zeitschr. f. Math. 15. Jahrg. (1870) [1—15, 229—268].

Demnächst wurde zu einer Untersuchung dieser Art der Astronom Hill durch eine Aufgabe aus dem Gebiete der Astronomie geführt.

Hill, On the part of the motion of the lunar perigee which is a fonction of the mean motions of the sun and moon. [reprinted, with som additions, from a paper published at Cambridge U. S. A. 1877.] Act. math. Bd. 8 (1886) [1—36] S. 19 ff. und später.

Poincaré, Remarques sur l'emploi de la méthode précédente. (Es geht ein Aufsatz von Appell voraus.) Bull. soc. math. de Fr. t. 13 1884—1885 [19—27].

Endlich machte wiederum Poincaré daraus den Gegenstand eines besonderen Aufsatzes: Sur les déterminants d'ordre infini. Bull. soc. math. de Fr. t. 14 1885—1886 [77—90].

Danach ist derselbe Stoff noch einmal durch Helge von Koch aufgenommen worden bei Gelegenheit einer Frage bezüglich der linearen Differentialgleichungen. In einer zweiten Abhandlung dieses Verfassers finden sich die Determinanten von der Ordnung unendlich in einer gewissen Ausdehnung behandelt.

Helge von Koch, Sur une application des déterminants infinis à la théorie des équations différentielles linéaires. Act. math. Bd. 15 (1891) [53—63].

Helge von Koch, Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires. Act. math. Bd. 16 (1892. 1893) [217—295].

Eine neuere zusammenfassende Darstellung bietet

Cazzaniga, Sui determinanti d'ordine infinito. Ann. di mat. ser. 2. t. 26 (1897) [143—217].

Cazzaniga, Intorno ad un tipo di determinanti nulli d'ordine infinito. Ann. di mat. ser. 3. t. 1 (1898) [83—94].

Cazzaniga, Appunti sulla moltiplicazione dei determinanti normaloidi. Ann. di mat. ser. 3. t. 2 (1899) [229—308].

Cazzaniga, Intorno ai reciproci dei determinanti normali. Acc. Tor. vol. 34 1898—99 [495—514].

Man vergl. auch Pringsheim in Encycl. d. math. Wiss. I. A. 3. Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse. Art. 58 u. 59.

Betrachten wir eine Matrix, bei der die Elemente der Hauptdiagonale gleich 1 sind,

$$\begin{matrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & 1 & a_{23} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{matrix}$$

Wir wollen davon n Spalten und n Zeilen herausheben und die diesen zugehörige Determinante bilden. Lassen wir darauf n sich ändern, so erhalten wir für letztere eine unbegrenzte Folge von Werthen. Besteht überhaupt für diese Folge ein Grenzwerth, so werden wir ihn als Determinante der Ordnung unendlich bezeichnen. Poincaré hat eine hinreichende Bedingung dafür aufgefunden, dass eine so gestaltete Determinante konvergent ist.

Diese Bedingung wird in der folgenden einfachen Fassung ausgesprochen:

Wenn die Doppelreihe

$$\sum |a_{ij}|$$

wobei i von j verschieden ist, konvergiert, dann konvergiert auch die Determinante, deren Hauptelemente gleich 1 sind.

Es würde sich ja die Determinante D für den Fall eines endlichen Werthes n aus dem Produkt:

$$\begin{aligned} \Pi = & [1 + |a_{21}| + |a_{31}| + \cdots] \times \\ & \times [1 + |a_{12}| + |a_{32}| + \cdots] \times \\ & \times \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \end{aligned}$$

darstellen lassen, indem man dies Produkt entwickelte und dann den verschiedenen Gliedern der Entwicklung Koeffizienten 1, —1, oder Null je nach den Umständen beifügte. Wir leiten hieraus ab, dass

sicherlich D dem absoluten Werthe nach kleiner ist, als Π. Wir wollen die beiden D und die beiden Π, welche zwei verschiedenen Werthen von n entsprechen, vergleichen.

Setzen wir in D_{n+p} oder auch in Π_{n+p} gewisse Elemente gleich Null, so erhalten wir D_n, Π_n. Die hierbei verschwindenden Glieder stellen also die Differenzen: $D_{n+p} - D_n$, $\Pi_{n+p} - \Pi_n$ dar. Andrerseits sind die Glieder, die in Π_{n+p} zu Null werden, sämmtlich positiv, und einige von ihnen stimmen, wenn sie theils mit negativem Vorzeichen, theils mit positivem versehen werden, mit denjenigen Gliedern überein, die innerhalb D_{n+p} gleich Null gesetzt werden sollten.

Wir können also schliessen, dass dem absoluten Werthe nach auch die Differenz der beiden D kleiner ist, als die der beiden entsprechenden Π, also:

$$|D_{n+p} - D_n| < \Pi_{n+p} - \Pi_n$$

und daraus entnehmen wir, dass, wenn Π zu einem Grenzwerth hin konvergiert, auch D einen Grenzwerth besitzt, weil ja dann die Grenze von $(\Pi - \Pi')$ Null ist und also auch die Grenze von $(D - D')$ verschwindet.

Nun ist das unendliche Produkt Π konvergent, wenn die Reihe

$$\sum |a_{ij}|$$

konvergiert, mithin erscheint der Lehrsatz bewiesen.

Für den Fall, wo die diagonalen Elemente nicht gleich 1 sind, hat von Koch den allgemeineren Lehrsatz gefunden:

Die Determinante konvergiert, wenn die Reihe der nicht diagonalen Elemente absolut konvergiert, und das Produkt der Diagonalelemente absolut konvergiert.

Und wirklich, konvergiert das unendliche Produkt

$$\Pi a_{ii}$$

und setzen wir

$$a_{ii} = a'_{ii} + 1, \qquad a_{ij} = a'_{ij}$$

so folgt, dass die einfache Reihe

$$\sum |a'_{ii}|$$

konvergent ist, mithin desgleichen die vollständige Doppelreihe

$$\sum |a'_{ij}|$$

wo i gleich oder verschieden ist von j, und hiernach gelangt man bei Wiederholung der oben angestellten Überlegungen ohne weiter

die Beschränkung einzuführen, dass i von j verschieden sei, zu dem Nachweise der Konvergenz unserer Determinante.

Von Koch behandelt in der angeführten Arbeit die von ihm so benannten Determinanten der Normalform, und das sind solche, die den folgenden beiden Bedingungen Genüge leisten: Erstens, es soll die Reihe $\Sigma\,|a_{ij}|$ (i von j verschieden) konvergent sein und zweitens, das Produkt $\Pi\,|a_{ii}|$ soll konvergieren.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so weiss man, dass die unendliche Determinante konvergiert. Ausserdem wird nachgewiesen, dass nach einer Umstellung der Spalten und der Zeilen, bei der die diagonalen Elemente diagonale bleiben und mithin die nicht diagonalen auch nicht diagonale, man wiederum eine konvergente Determinante erhält, die auch denselben Werth besitzt. Und deshalb kann man sie unbedingt konvergent nennen. (Siehe Acta math. Bd. 16 S. 228 f.) Überdies beschäftigt sich derselbe Verfasser auch mit dem Produkt zweier normalen Determinanten und findet, dass dies nach demselben Bildungsgesetz auszuführen ist, wonach man das Produkt zweier Determinanten einer endlichen Ordnung herzustellen hat, und dass gedachtes Verfahren zu einer neuen und wiederum einer normalen Determinante führt. (a. a. O. S. 231.)

§ 52. Über geränderte Determinanten. Lehrsatz von Le Paige.

Wir haben bereits in einem früheren Paragraphen (Siehe § 12) von einem Lehrsatz Kunde gegeben betreffs der Entwicklung einer geränderten Determinante, das heisst, einer Determinante, die man aus einer andern durch Hinzufügung einer gewissen Anzahl von Spalten und desgleichen von Zeilen erhält. Man führt die Entwicklung einer so gestalteten Determinante aus, indem man die Elemente der hinzugefügten Zeilen und Spalten zu Entwicklungsgrössen macht.

Es ist nun von Wichtigkeit, von derartigen Determinanten diesen weiteren Lehrsatz darzustellen, der von Le Paige gefunden ist.

Le Paige, Note sur les déterminants bordés. Bull. soc. math. de Fr. t. 8 (1880) [128—132].

Der Deutlichkeit und Einfachheit der Erörterung zu Liebe setzen wir eine Determinante von der dritten Ordnung und zwar eine symmetrische gegeben voraus

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Fügt man ihr zwei Zeilen und zwei Spalten in der Weise hinzu, dass man dabei eine symmetrische Determinante behält, so ergiebt sich etwa:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_1 & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & x_2 & y_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & x_3 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Wir nehmen nun die zu D reziproke Determinante in Betracht, nämlich

$$R = D^2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

und multiplizieren D^2 mit $\varDelta$, nachdem wir in D^2, ohne eine Änderung des Werthes der Determinante zu verursachen, wie folgt, geeignete Spalten und Zeilen hinzugefügt haben:

$$D^2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Es ergiebt sich sodann

$$D^2\varDelta = \begin{vmatrix} D & 0 & 0 & \sum A_{1i}x_i\,, & \sum A_{1i}y_i \\ 0 & D & 0 & \sum A_{2i}x_i\,, & \sum A_{2i}y_i \\ 0 & 0 & D & \sum A_{3i}x_i\,, & \sum A_{3i}y_i \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= D \left\| \begin{matrix} \sum A_{1i}x_i & \sum A_{2i}x_i & \sum A_{3i}x_i \\ \sum A_{1i}y_i & \sum A_{2i}y_i & \sum A_{3i}y_i \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} x_1 & x_3 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \right\|$$

Führen wir das Produkt der beiden Matrices nach der bekannten Regel (Siehe S. 30) aus, so erhalten wir nach Unterdrückung eines gemeinsamen Faktors D

$$D.\Delta = \begin{vmatrix} \sum A_{ij}x_ix_j\,, & \sum A_{ij}x_iy_j \\ \sum A_{ij}y_ix_j\,, & \sum A_{ij}y_iy_j \end{vmatrix}$$

Im allgemeinen Falle wird ein entsprechender Ausdruck für das Produkt

$$\Delta . D^{p-1}$$

hervorgehen, wenn hiebei D eine symmetrische Determinante und p die Anzahl der Zeilen und der damit übereinstimmenden Spalten bedeutet, die zur Erzielung der Determinante Δ mit D verbunden wurden. Die Determinante, in der ein solches Produkt dann seine Darstellung findet, ist von der Ordnung p.

Diese Eigenschaft wird bei Fragen der analytischen Geometrie benutzt. Man vergleiche beispielsweise:

Hesse (Gundelfinger), Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen 2. Ordnung. 3. Aufl. Leipzig 1876. S. 179.

Clebsch (Lindemann), Vorlesungen über Geometrie I. Leipzig 1876. S. 909.

§ 53. Maximalwerth einer Determinante. Untersuchung von Hadamard.

Von nicht geringer Wichtigkeit ist die folgende Frage:

Nehmen wir an, dass die Elemente einer Determinante alle dem absoluten Werthe nach kleiner sind, als eine Grösse a; welches wird dann die obere Grenze für den absoluten Werth der Determinante selbst sein?

Sylvester, Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous sign-successions, and tessellated pavements in two or more colours, with applications to Newtons rule, ornamental tile-work and the theory of numbers. part 1: Matrices and sign-successions. Phil. Mag. 4. ser. vol. 34 (1867) [461—475].

Hadamard, Résolution d'une question relative aux déterminants. Bull. sc. math. 2e sér. t. 17 (1893) 1e p. [240—246].

Augenscheinlich ist der Ausdruck

$$n!\; a^n$$

sicher grösser als die obere Grenze des Werthes der Determinante, denn ihn würde man erhalten, wenn man alle Glieder der Determinante positiv annähme (während es in der Entwicklung einer Determinante stets positive und negative Glieder giebt) und wenn man dann an Stelle jedes einzelnen Elementes den Höchstbetrag der Elementwerthe a einsetzte. Offenbar ist ein solcher Grenzwerth zu hoch, da er ja niemals durch die Entwickelung der Determinante erreicht werden kann.

Um uns von einem allgemeineren Gesichtspunkte aus unserm Ziele zu nähern, wollen wir annehmen, die Elemente seien beliebige komplexe Grössen.

Es sei Δ eine mit den gegebenen Elementen gebildete Determinante und Δ' die auf gleiche Weise dargestellte, jedoch aus Elementen, die zu jenen konjugiert sind. Dann werden offenbar Δ und Δ' zwei konjugierte Grössen sein, der Art, dass ihr Produkt dem Quadrate des Moduls von Δ gleichkommt, mithin in jedem Falle eine reelle und positive Grösse ist.

Betrachten wir die ersten p Zeilen von Δ und die entsprechenden Zeilen von Δ'. Das Produkt der beiden solchergestalt ausgehobenen Matrices wird der Summe der Produkte gleichkommen, in denen die Minoren der einen mit den entsprechenden Minoren der andern verbunden sind (Siehe S. 30), also gleich der Quadratsumme der Moduln, die den Minoren der ersteren Matrix zugehören.

Sind a_{ij} die Elemente von Δ und a'_{ij} die von Δ', so wird das Produkt der beiden Matrices von n Spalten und p Zeilen mit der Determinante

$$P_p = |s_{ij}| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots p)$$

gleichwerthig sein, wobei

$$s_{ij} = a_{i1}a'_{j1} + a_{i2}a'_{j2} + \cdots + a_{in}a'_{jn}$$

und augenscheinlich sind s_{ij} und s_{ji} konjugiert und die Hauptelemente s_{ii} sind die Quadratsummen der Moduln, die den Elementen innerhalb einer Zeile von Δ. angehören.

Sondern wir innerhalb P_p den Theil ab, der das letzte Hauptelement als Faktor enthält, so ergiebt sich:

$$P_p = s_{pp}P_{p-1} + Q_p$$

Hierbei wurde gesetzt:

$$Q_p = \begin{vmatrix} s_{11} & \ldots & s_{1,p-1} & s_{1,p} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ s_{p-1,1} & \ldots & s_{p-1,p-1} & s_{p-1,p} \\ s_{p,1} & \ldots & s_{p,p-1} & 0 \end{vmatrix}$$

Man gewinnt also die Determinante Q_p aus P_p, indem man darin Null an die Stelle des letzten Hauptelementes einsetzt.

Das Komplement zu einem Hauptelemente in Q_p (abgesehen vom letzten, wo es P_{p-1} beträgt) ist ein gewisses Q_{p-1}, das man erhält, wenn man das Produkt der beiden Matrices bildet von n Spalten und gewissen $(p-1)$ in Δ und Δ' ausgewählten Zeilen und sodann in

der Determinantenform dieses Produktes an Stelle des letzten Hauptelementes Null treten lässt.

Wir wollen nun die zu Q_p reziproke Determinante betrachten, deren Elemente S_{ij} heissen mögen, und aus ihr im Besonderen den Minor

$$\begin{vmatrix} S_{hh} & S_{hp} \\ S_{ph} & S_{pp} \end{vmatrix} \qquad (h = 1, 2, \ldots p - 1)$$

Dieser Minor wird gleichkommen Q_p, dies multipliziert mit dem Komplement des zu ihm homologen Minors in Q_p (Siehe S. 34), einem gewissen P_{p-2}.

Indessen ist S_{ph} konjugiert zu S_{hp} und überdies

$$S_{hh} = Q_{p-1}$$
$$S_{pp} = P_{p-1}$$

Daraus erhält man

$$Q_p P_{p-2} = Q_{p-1} P_{p-1} - |S_{ph}|^2$$

wenn man unter

$$|S_{ph}|$$

den Modul der betreffenden Grösse S_{ph} versteht.

Wie aus dieser Formel unmittelbar ersichtlich ist, wird, wenn Q_{p-1} eine negative Grösse ist (da ja die P wesentlich positive Grössen sind), auch Q_p negativ sein. Nun ist $Q_2 = -|s_{12}|^2$ wirklich negativ, also wird es ebenso sein mit $Q_3, Q_4, \ldots$ und endlich auch mit Q_p.

Wir können also schliessen, dass die Q_p sämmtlich negative Grössen sind.

Ausserdem können die Q_p nur dann Null sein, wenn alle Elemente der letzten Spalte Null sind.

Augenscheinlich kann, wenn Q_{p-1} von Null verschieden ist und mithin eine wesentlich negative Grösse, Q_p nicht verschwinden.

Soll also Q_p Null sein, so muss sicher auch Q_{p-1} Null sein; nehmen wir an, dass Q_{p-1} nur verschwindet, wenn alle Elemente

$$s_{1p} \; s_{2p} \; \cdots \; s_{h-1,p} \; s_{h+1,p} \; \cdots \; s_{p-1,p}$$

Null sind, so ist die Folge davon, dass Q_p nicht Null sein kann ausser, wenn die genannten Elemente verschwinden. Mit andern Worten, Q_p wird nur dann Null, wenn alle Elemente der letzten Spalte, abgesehen von $s_{h,p}$ verschwinden. Nun ist aber h ein beliebiger Werth des Index; lässt man ihn sich ändern, so gewinnt man dabei die Bedingung, dass sämmtliche Elemente der letzten Spalte verschwinden

müssen, wenn das nämliche bei Q_{p-1} eintritt. Nun trifft es in der That bei

$$Q_2 = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & 0 \end{vmatrix}$$

zu, dass $s_{12} = 0$ sein muss (oder auch, was dasselbe ist, dass $s_{21} = 0$, indem ja s_{21} konjugiert zu s_{12}), damit Q_2 verschwinde, also ist der Lehrsatz erwiesen.

Nachdem wir dies festgestellt, können wir zeigen, dass P_p höchstens dem Produkte seiner Hauptelemente gleichkommt.

Wirklich erkennt man aus der Formel

$$P_p = s_{pp} P_{p-1} + Q_p ,$$

wenn man annimmt, jene Eigenschaft bestätige sich für P_{p-1}, und wenn man daran denkt, dass Q_p negativ ist, dasselbe Verhalten auch als Eigenschaft von P_p.

Für $P_2 = s_{11} s_{22} - |s_{12}|^2$ ist augenfällig

$$P_2 \leqq s_{11} s_{22}$$

das heisst, für $p = 2$ wird thatsächlich diese Eigenschaft bestätigt. Überdies ist zu dem Bestehen der Gleichung

$$P_p = s_{11} s_{22} \ldots s_{pp}$$

erforderlich, dass Q_p Null sei und weiter noch

$$P_{p-1} = s_{11} s_{22} \ldots s_{p-1, p-1}$$

Nun wird aber damit herbeigeführt, dass alle Elemente innerhalb Q_p, die nicht Hauptelemente sind, verschwinden müssen.

Man erhält für $p = n$, da $P_n = |\varDelta|^2$

$$|\varDelta|^2 \leqq s_{11} s_{22} \ldots s_{n,n}$$

Wenn wir andrerseits für alle Elemente in Q_n, die nicht Hauptelemente sind, den Werth Null voraussetzen, also $s_{ij} = 0$ bei $i \neq j$, so liegt auf der Hand, dass dann $Q_n = 0$, und in Folge dessen erreicht $P_n = |\varDelta|^2$ seinen Maximalbetrag. Also gilt der Satz:

Wenn wir annehmen, dass die Moduln aller Elemente der Determinante höchstens gleich 1 sind, dann wird der Maximalbetrag des absoluten Werthes der Determinante gleich der Potenz $\frac{1}{2}n$ von n, und als die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Determinante dann diesen Werth erreicht, ist das Verschwinden sämmtlicher Grössen s_{ij} für $i \neq j$ anzusehen.

Diese Bedingungen bestimmen die a als Elemente einer Determinante, die durch Sylvester den Namen umgekehrt orthogonal erhalten hat.

Wir werden hierdurch zur Lösung der folgenden Aufgabe geführt: Mit Elementen, deren Modul den Werth 1 hat, soll eine Determinante dargestellt werden, die bei bestimmter Ordnungszahl den Maximalwerth erreicht.

Es beschäftigt sich mit dieser Aufgabe Sylvester in der angeführten Arbeit, doch vergleiche man seine Ergebnisse mit den Bemerkungen von Hadamard (a. a. O. S. 243).

Mit Vortheil machen wir die folgende Anmerkung. Wenn die Elemente im Allgemeinen komplex sind, dann ist der höchste Werth, den, wie wir gesehen haben, der Modul der Determinante annehmen kann, die Potenz $\frac{1}{2}n$ von n. Eine Determinante, deren Modul wirklich einen solchen Werth annimmt, wird schlechthin aus komplexen Elementen bestehen. Ist n eine Potenz von 2, dann kann man eine Determinante mit Maximalbetrag in reellen Elementen herstellen, welche dann eben nur von den einzigen Werthen $+1$ und -1 geliefert werden können. Für andere Werthe von n würde es möglicher Weise Determinanten mit reellen Elementen, die den Maximalbetrag in Höhe der Potenz $\frac{1}{2}n$ von n erreichten, überhaupt nicht geben. Jedoch wird man in jedem Falle diese beiden Aufgaben sich vorlegen können, die Hadamard am Schluss seiner beachtenswerthen Arbeit ausspricht und die wir hier wiederholen:

1. Für welche Werthe von n giebt es Determinanten mit Elementen $+1$, -1 oder überhaupt reellen Elementen, die den Werth: Potenz $\frac{1}{2}n$ von n, erreichen?

2. Wie würde man für jedes beliebige n Determinanten mit reellen Elementen, insbesondere $+1$, -1 darzustellen haben, damit sie zwar nicht den Werth: Potenz $\frac{1}{2}n$ von n, erreichen, aber dem absoluten Betrage nach dem höchst möglichen Werthe gleichkommen?

Man vergleiche hierzu eine neuere Arbeit von Scarpis

Scarpis, Sui determinanti di valore massimo. Ist. Lomb. Rend. (1898) [1441—1446].

§ 54. Kubische Determinanten und solche, deren Elemente von mehreren Indices abhängen.

Der Gedanke, Determinanten in Betracht zu ziehen, deren Elemente von mehr als zwei Indices abhängen, ist, wie Günther in seiner oftmals angeführten Schrift (S. 11 Anm.) bemerkt, ein Verdienst Vandermondes.

Doch hat man für den Ersten, der hierin einen bestimmteren Schritt vor-

wärts gethan, De Gasparis anzuerkennen mit einem besonders und zwar unter dem Pseudonym Jean Blaise Grandpas veröffentlichten Schriftchen: Sur les déterminants dont les éléments ont plusieurs indices. (25. Sept. 1861.)

Zwei Jahre später veröffentlichte Dahlander in Stockholm den Aufsatz

Dahlander, Om en klass funktioner hvilka ega flera egenskaper analoga med determinanternes. Stockh. Vet. Ak. Förh. 20. Jahrg. (1863) [295—304].

Im Jahre 1868 folgten die Arbeiten von:

Armenante, Sui determinanti cubici. Giorn. di Batt. vol. 6 (1868) [175—181].

Padova, Sui determinanti cubici. Giorn. di Batt. vol. 6 (1868) [182—189].

Zehfuss, Über eine Erweiterung des Begriffs der Determinanten. Frankfurt.

De Gasparis, Sopra due teoremi dei determinanti a tre indici, ed un' altra maniera di formazione degli elementi di un determinante ad m indici. Acc. Napoli Rendic. t. 8 (1868) [118—121].

Eine Darstellung der bis dahin erhaltenen Ergebnisse dankt man Garbieri.

Garbieri, Determinanti formati di elementi con un numero qualunque d'indici. Giorn. di Batt. vol. 15 (1877) [89—100].

Gleicherweise bildet eine Darstellung Garbieris den Hauptbestandtheil der Seconda parte della quattordicesima rivista di giornali del Giusto Bellavitis. Atti Ist. Ven. t. 4 ser. 5. 1877—1878, wo S. 251—273 im Anschluss an obigen Aufsatz aus Giorn. di Batt. vol. 15 die „Determinanti formati di n^l elementi" behandelt werden.

Endlich kann man auch mit Vortheil die Schrift von Günther über Determinanten nachschlagen (Erlangen 1877, Kap. 9. S. 185—194.), desgleichen Scott, Det. 1880. chap. 7 [89—98].

Über kubische und höhere Determinanten giebt es noch neuere Arbeiten von

Tanner, Notes on determinants of n dimensions. Proc. Lond. math. soc. vol. 10 (1879) [167—180].

Scott, On cubic determinants and other determinants of higher class, and on determinants of alternate numbers. Proc. Lond. math. soc. vol. 11 (1880) [17—29].

Zajaczkowski, (Siehe Fortschr. der Math. Bd. 13. S. 121) Theorie der Determinanten von p Dimensionen. 1881. Warschau. (Polnisch.)

Escherich, Die Determinanten höheren Ranges und ihre Verwendung zur Bildung von Invarianten. Akad. Wien. Denkschr. 43. Bd. 2. Abth. (1882) [1—12].

Gegenbauer, Über Determinanten höheren Ranges. Akad. Wien. Denkschr. 43. Bd. 2. Abth. (1882) [17—32].

Gegenbauer, Zur Theorie der Determinanten höheren Ranges. Akad. Wien. Denkschr. 46. Bd. 2. Abth. (1883) [291—298].

Gegenbauer, Über Determinanten höheren Ranges. Akad. Wien. Denkschr. 49. Bd. 2. Abth. (1885) [225—230].

Gegenbauer, Zur Theorie der Determinanten höheren Ranges. Akad. Wien. Denkschr. 50. Bd. 1. Abth. (1885) [145—152].

Gegenbauer, Über windschiefe Determinanten höheren Ranges. Akad. Wien. Denkschr. 55. Bd. 1. Abth. (1889) [39—48].

Gegenbauer, Über einige arithmetische Determinanten höheren Ranges. Akad. Wien. Ber. Bd. 101. Abth. 2a (1892) [425—484].

Wir wollen hier nicht auf Einzelheiten bezüglich der Lehre von den Determinanten mit mehreren Indices eingehen, sondern nur auseinandersetzen, was dabei die Grundlage bildet.

Stellen wir uns eine Anzahl n^3 von Elementen a_{ijk} vor, so dass die Indices i, j, k die Werthe $1, 2, \ldots n$ annehmen können. Vertheilen wir solche Elemente in dem Raum eines Würfels auf entsprechende Weise, wie wir es früher zur Herstellung einer quadratischen

Matrix gethan, so erhalten wir nun das Schema, dem der Name kubische Matrix beigelegt werden darf.

Diese Matrix wird sich auf drei verschiedene Weisen in n horizontale oder vertikale Ebenen zerlegen lassen, wobei in einer jeden von ihnen eine gewisse quadratische Matrix dargestellt erscheint.

Innerhalb der gedachten kubischen Matrix hat man vier Diagonalen zu betrachten; wir werden diejenige als die Hauptdiagonale bezeichnen, auf der sich die Elemente mit drei gleichen Indices befinden, nämlich:

$$a_{111}\ a_{222}\ \ldots\ a_{nnn}$$

Wir wollen nun das Produkt dieser n Elemente bilden und danach auf jede mögliche Weise die zweiten Indices und desgleichen die dritten Indices mit einander vertauschen. Wir erhalten dann aus jenem Anfangsgliede im Ganzen $n!\,n! = (n!)^2$ Glieder und werden einem jeden von ihnen das Vorzeichen $+$ oder $-$ zutheilen, jenachdem gerade oder ungerade ist die Anzahl der Inversionen, welche in der Permutation der zweiten Indices enthalten sind, vermehrt um die entsprechende Anzahl mit Bezug auf die dritten Indices.

Die Summe aller so erhaltenen Glieder nennen wir die Entwickelung der kubischen Determinante.

Augenscheinlich werden sich in jedem Gliede der Entwicklung nur solche Faktoren vereint finden, von denen nicht zwei derselben vertikalen oder horizontalen Ebene angehören, weil sie ja um derselben Ebene anzugehören entweder in den ersten oder den zweiten oder in den dritten Indices übereinstimmen müssten.

Ein wesentlich abweichendes Verhalten gegenüber gewöhnlichen Determinanten zeigt sich bei den kubischen darin, dass, während durch eine quadratische Matrix nur eine einzige Determinante bestimmt wird, durch die kubische Matrix im Gegentheil drei Determinanten von verschiedenem Werthe bestimmt sein können, und zwar erhalten wir diese damit, dass wir die Summation der Glieder, die sich aus dem Hauptgliede

$$a_{111}\ a_{222}\ \ldots\ a_{nnn}$$

herleiten lassen, auf dreifache Weise ausführen, indem wir einmal die ersten Indices fest belassen und die andern vertauschen, oder aber während der Vertauschung die zweiten oder endlich die dritten Indices als unveränderlich ansehen.

Um sich hiervon zu überzeugen, genügt ein Blick auf das einfachste Beispiel, in dem $n = 2$ die Ordnung der Determinante darstellt.

Das Hauptglied wird sein

$$a_{111}\ a_{222}$$

mit positivem Vorzeichen. Lassen wir die ersten Indices fest, vertauschen die anderen und wenden die angegebene Regel an, so erhalten wir die vier Glieder:

$$+ a_{111}a_{222} - a_{121}a_{212} - a_{112}a_{221} + a_{122}a_{211}$$

Lassen wir im Gegentheil die zweiten Indices fest oder auch die dritten, so erhalten wir Ausdrücke, die ihrem absoluten Betrage nach jenen gleich sind, aber abweichende Vorzeichen haben. Beziehungsweise ergeben sich die Aggregate:

$$+ a_{111}a_{222} + a_{212}a_{121} - a_{112}a_{221} - a_{211}a_{122},$$

$$+ a_{111}a_{222} - a_{121}a_{212} + a_{221}a_{112} - a_{211}a_{122}.$$

Wir werden als erste Determinante diejenige bezeichnen, welche in Folge der Vertauschungen der zweiten und dritten Indices entsteht, als zweite Determinante, die durch die Vertauschungen der dritten und ersten Indices zur Darstellung gelangt und die dritte Determinante soll Vertauschungen der ersten und der zweiten Indices entsprechen.

Jedes Element a_{ijk} innerhalb der kubischen Determinante gehört einer horizontalen Ebene an und zwei vertikalen, gegen einander senkrecht gelegenen, gleichwie bei der gewöhnlichen Determinante jedes Element einer Spalte und einer Zeile angehört. Wir wollen diese Ebenen Schichten nennen.

Um eine bestimmtere Vorstellung herbeizuführen, nehmen wir an, der erste Index bezeichne die Ordnungszahl der horizontalen Schicht, der zweite Index die Ordnungszahl von einer der beiden vertikalen Schichten, die wir die erste vertikale Schicht nennen wollen und somit entspreche der dritte Index der übrig bleibenden zweiten vertikalen Schicht.

Wenn wir zwei horizontale Schichten unter einander vertauschen, so bleibt diejenige Determinante, die dadurch bestimmt ist, dass man allein die zweiten und dritten Indices im Hauptgliede wechseln lässt (man sehe die oben gegebene Erklärung), unverändert.

Denn, wenn wir die Faktoren eines jeden Gliedes immer in der Weise angeordnet sehen wollen, dass die ersten Indices in der natürlichen Reihenfolge erscheinen, so werden wir zwei Elemente in der Permutation der zweiten Indices und ebenso in der Permutation der dritten Indices mit einander ihre Plätze müssen wechseln lassen.

Wenn man nun innerhalb einer Permutation zwei Elemente mit einander vertauscht, so ändert sich die Anzahl der Inversionen um

eine ungerade Zahl, mithin erscheint für das Ganze von zwei Vertauschungen innerhalb der zweiten und der dritten Indices die Anzahl der Inversionen um eine gerade Zahl verändert und hiernach wird das Glied, um das es sich handelt, dasselbe Vorzeichen beibehalten.

Wenn wir im Gegentheil zwei vertikale parallele Ebenen mit einander vertauschen, dann tritt nur ein Wechsel zwischen zwei Elementen ein innerhalb der Permutation der zweiten Indices oder aber nur in der der dritten Indices und mithin wird das Zeichen des Gliedes verändert; also gilt der Satz:

Wenn wir zwei vertikale parallele Schichten mit einander vertauschen, so ändert die in gewohnter Weise bestimmte Determinante ihr Zeichen.

Wie man sieht, besteht dieser grundlegende Unterschied zwischen dem Falle der gewöhnlichen Determinanten und dem der kubischen; bei diesen giebt es stets eine Richtung der Folge paralleler Ebenen von der Beschaffenheit, dass, wenn man zwei unter ihnen beliebig auswählt und vertauscht, die Determinante ungeändert bleibt. Es lässt sich bewirken, dass diese Eigenschaft sich für eine beliebige unter den drei verschiedenen Richtungen von Ebenen, der horizontalen und der vertikalen verwirklicht und dies zwar entsprechend den drei verschiedenen Determinanten, die sich mittelst der kubischen Matrix bestimmen lassen.

Augenscheinlich besteht auch die folgende Eigenschaft:

Jede kubische Determinante kann man als Summe von $n!$ gewöhnlichen Determinanten darstellen.

Und wirklich, stellen wir einmal eine Permutation der zweiten Indices innerhalb des Gliedes

$$a_{111}\ a_{222}\ \ldots\ a_{nnn}$$

fest und vertauschen dann die dritten Indices auf jede mögliche Weise. Der Inbegriff aller Glieder, die man so erhalten wird, mit dem Zeichen $+$ oder $-$ gedacht, wird eine gewöhnliche Determinante sein. Hiermit erscheint der Lehrsatz bewiesen.

Eine weitere Eigenthümlichkeit, die dann auf andere Weise die Darstellung einer kubischen Determinante mittelst gewöhnlicher Determinanten liefern kann, ist die folgende:

Das Produkt zweier gewöhnlichen Determinanten lässt sich als kubische Determinante ausdrücken. (Padova.)

Sind nämlich a_{ri}, b_{sj} die Elemente der zwei vorgelegten Determinanten, so ist das allgemeine Element des Produktes

$$a_{r1}b_{s1} + a_{r2}b_{s2} + \cdots + a_{rn}b_{sn}.$$

Solch ein Produkt lässt sich, nach der Regel für die Zerlegung einer Determinante mit vielgliedrigen Elementen, in $n!$ Determinanten spalten, die in ihrer Gesammtheit die kubische Determinante ergeben, deren Hauptglied

$$(a_{11}b_{11})\ (a_{22}b_{22})\ \cdots\ (a_{nn}b_{nn})$$

ist, und deren allgemeines Glied

$$(a_{1i_1}b_{1j_1})\ (a_{2i_2}b_{2j_2})\ \cdots\ (a_{ni_n}b_{nj_n}),$$

wobei

$$i_1\ i_2\ \ldots\ i_n$$

$$j_1\ j_2\ \ldots\ j_n$$

als zwei Permutationen der Zahlreihe $1, 2, \ldots n$ aufzufassen sind.

Die so gebildete kubische Determinante hat zum allgemeinen Element

$$a_{ki}\ b_{kj},$$

die drei Indices k, i, j ändern sich von 1 zu n.

Führt man das Produkt der beiden gegebenen Determinanten auf eine der andern drei möglichen Arten aus, so ergeben sich wiederum kubische Determinanten, und deren Elemente sind beziehungsweise

$$a_{ki}\ b_{jk}$$

$$a_{ik}\ b_{kj}$$

$$a_{ik}\ b_{jk}$$

Unser Lehrsatz giebt das Mittel an die Hand, symbolisch eine kubische Determinante als das Produkt zweier gewöhnlichen Determinanten auszudrücken.

Wir wollen voraussetzen, dass die a und die b Zeichen sind, welche die Bedeutung von Grössen nur in dem Falle haben, wenn sie sich in den Verbindungen

$$a_{ki}\ b_{kj}$$

vereinigt finden, das heisst, wenn das Produkt aus zweien von ihnen vorliegt, deren erste Indices gleich sind. Das allgemeine Element einer gegebenen kubischen Determinante

$$a_{kij}$$

kann dann in symbolischer Absicht dem Produkte dieser a und b gleichgesetzt werden und umgekehrt, ist das symbolische Produkt

$a_{ki}\, b_{kj}$ gegeben, so kann ihm nur ein einziges Element der gegebenen kubischen Determinante entsprechen.

Es erscheint mithin erwiesen, dass sich die letztere symbolisch als das Produkt zweier gewöhnlichen Determinanten ausdrücken lässt. Diese sind jedoch nur als symbolische und nicht als wirkliche aufzufassen und gewinnen die Bedeutung der wirklichen nur erst dann, wenn sie mit einander multipliziert werden, indem man deshalb Sorge trägt, dass ihr Produkt nach der gewöhnlichen Regel ausgeführt werde.

Wenn man von einer kubischen Determinante alle Elemente der drei Ebenen unterdrückt, die in einem Elemente a_{kij} zusammentreffen, so erhält man eine neue kubische Determinante, die man als den komplementären Minor des Elementes a_{kij} wird ansprechen dürfen und bezeichnen durch A_{kij}.

Multipliziert man ihn mit $(-1)^{i+j}$, vorausgesetzt, dass es sich um die erste Determinante handelt, die aus der kubischen Matrix heraus ihre Bestimmung findet, so erhält man, was den Namen des algebraischen Komplementes dieses Elementes trägt.

Es lässt sich zeigen, dass ähnlich wie bei gewöhnlichen Determinanten der Satz gilt:

Der Werth der kubischen Determinante ist der Summe der Produkte gleich, worin die Elemente einer Schicht mit den ihnen entsprechenden algebraischen Komplementen verbunden sind.

Hierfür würde der Beweis in ähnlicher Weise zu führen sein, wie bei gewöhnlichen Determinanten.

Wir gehen nun zur Multiplikation der kubischen Determinanten über.

Betrachten wir das Produkt einer kubischen Determinante $|a_{kij}|$ mit einer gewöhnlichen Determinante $|b_{rs}|$.

Die kubische Determinante können wir als die algebraische Summe von $n!$ gewöhnlichen Determinanten ansehen, wovon eine jede gleich ist

$$\pm \sum_j \pm a_{1 i_1 j_1}\, a_{2 i_2 j_2} \ldots a_{n i_n j_n}$$

Hier erstreckt sich die Summation auf alle Permutationen der Indices $j_1 j_2 \ldots j_n$ und ausserdem stellt $(i_1\, i_2 \ldots i_n)$ eine Permutation der Indices $1, 2, \ldots n$ dar. Für die Summe als Ganzes ist positives oder negatives Zeichen zu wählen, jenachdem die Permutation der i der geraden oder ungeraden Klasse angehört.

Das allgemeine Element einer solchen Determinante ist

$$a_{k i_k j}$$

wobei sich k und j ändern. Die Elemente, denen dasselbe k zugeordnet ist, bilden die Elemente einer Zeile und die mit demselben j stellen die Elemente einer Spalte dar. Das Produkt einer solchen Determinante mit $|b_{rs}|$ wird das allgemeine Element

$$c_{kr} = \sum_s a_{k i_k s} b_{rs}$$

enthalten. Wird nun die Permutation $(i_1\, i_2 \ldots i_n)$ der Zahlen $1, 2, \ldots n$ der Änderung unterworfen und für jeden möglichen Fall dieser Wandlung das Ergebniss der Produktbildung festgestellt, so ergiebt sich in der algebraischen Summe der sämmtlichen $|c_{kr}|$ das Produkt der beiden gegebenen Determinanten. Richten wir jetzt unser Augenmerk auf die kubische Determinante, deren allgemeines Glied

$$\alpha_{kir} = \sum_s a_{k i_k s} b_{rs}$$

sein mag, und zerlegen diese kubische Determinante in eine Summe von gewöhnlichen Determinanten, so erhalten wir, was leicht ersichtlich, genau die Summe der Determinanten, deren Elemente die c sind. Für unveränderliches k leitet man die quadratische Matrix der α_{kir} (wo einzig i, r sich ändern) aus den quadratischen Matrices der a_{kis}, b_{rs} nach der bekannten Regel her, die für das Produkt zweier quadratischen Matrices gilt. Also können wir aussprechen:

Um das Produkt einer kubischen Determinante und einer gewöhnlichen Determinante zu erhalten, hat man eine kubische Determinante zu bilden, deren Schichten entstehen, wenn man nach der gebräuchlichen Regel die quadratischen Matrices, welche die Schichten der gegebenen kubischen Determinante darstellen, mit der quadratischen Matrix der Multiplikator-Determinante multipliziert.

Siehe Armenante, a. a. O. S. 181.

Wir könnten nun zur Darlegung gewisser Lehrsätze von De Gasparis und Padova schreiten, wollen uns aber bei diesem Gegenstande nicht länger aufhalten. Man mag hierfür die schon angeführten Werke vergleichen.

§ 55. Determinanten und Matrices, die verschwinden. Rang einer Matrix.

Wir werden sagen, eine Matrix von n Zeilen und m Spalten $(m > n)$ sei Null, wenn alle Determinanten n-ter Ordnung innerhalb dieser Matrix verschwinden.

In einer quadratischen oder einer rechteckigen Matrix können Null sein alle Determinanten von der Ordnung n, alle die von den Ordnungen $(n-1), (n-2), \ldots$ Es sei p die höchste Ordnungszahl von Determinanten, die in jener Matrix enthalten und nicht sämmtlich Null sind. Wir setzen also voraus, dass alle Determinanten der Ordnung $(p+1)$ und mithin auch die von höherer Ordnung sämmtlich verschwinden und dass es unter allen denen p-ter Ordnung wenigstens eine von Null verschiedene giebt. Die Zahl p heisst der Rang (auch Charakteristik) der gegebenen Matrix. Augenscheinlich haben eine Determinante oder eine Matrix, die gleich Null sind, höchstens $(n-1)$ zur Rangzahl.

Wir wollen jetzt die nothwendigen und die hinreichenden Bedingungen dafür aufsuchen, dass eine Matrix den Rang $(n-1)$ habe, also dafür, dass sie verschwinde, ohne dass alle Determinanten $(n-1)$-ter Ordnung Null sind. Es wird uns gelingen, einen Lehrsatz aufzustellen, der zu einem in den ersten Paragraphen bewiesenen Satze die Umkehrung bildet. Wenn nämlich die Elemente einer Zeile innerhalb einer rechteckigen Matrix die gleichen linearen Verbindungen der Elemente paralleler Zeilen sind (die Zahl der Zeilen wird kleiner als die Zahl der Spalten vorausgesetzt), so sind (wie nach § 2,11 bekannt) alle in jener Matrix enthaltenen Determinanten n-ter Ordnung offenbar gleich Null und mithin die Matrix selbst gleich Null. Und nun wollen wir nachweisen, dass umgekehrt, wenn die Matrix Null ist, die Elemente einer Zeile dieselben linearen Verbindungen derer von parallelen Zeilen sein müssen. Wir beginnen mit der Annahme, dass wenigstens einer von den Minoren der Ordnung $(n-1)$ von Null verschieden sei. Ohne die Allgemeinheit aufzuheben, können wir voraussetzen, solch ein Minor sei der aus den ersten $(n-1)$ Zeilen und den ersten $(n-1)$ Spalten bestehende Minor:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,n-1} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n-1,1} & \ldots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

Ist unsere Matrix gleich Null, dann werden die Determinanten Null sein, die man aus diesem Minor durch Hinzufügung einer Spalte und einer Zeile ableiten mag, also alle Determinanten der Form

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1r} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,r} \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nr} \end{vmatrix}$$

Wenn man diese nach den Elementen der letzten Spalte entwickelt und bezeichnet mit

$$A_1, A_2, \dots A_n$$

die algebraischen Komplemente der Elemente der letzten Spalte, also die Determinanten $(n-1)$-ter Ordnung, welche innerhalb der ersten $(n-1)$ Spalten der gegebenen Matrix enthalten sind, jede mit dem passenden Zeichen versehen, so ergiebt sich für einen beliebigen Werth des Index r

$$a_{1r}A_1 + a_{2r}A_2 + \dots + a_{nr}A_n = 0$$

Diese Beziehung gilt, wie hervorgehoben worden, für einen beliebigen Werth des Index r, der aus den Zahlen $1, 2, \dots m$ gewählt sein kann; denn wenn $r \leqq n-1$ ist, so wird die vorausgehende Determinante aus dem Grunde verschwinden, weil sie ja zwei gleiche Spalten enthält und wenn $r > n-1$, dann verschwindet sie nach unserer Annahme.

Die vorangehende Gleichung giebt uns also zu erkennen:

Wenn die Matrix von n Zeilen und m Spalten Null ist und zum Rang $(n-1)$ hat, so besteht zwischen den Elementen einer Spalte stets dieselbe lineare und homogene Beziehung.

Nun wollen wir sehen, wie man diesen Lehrsatz verallgemeinern kann im Fall, dass der Annahme nach die Matrix nicht den Rang $(n-1)$ habe, sondern im Allgemeinen p.

Dann wird wenigstens ein Minor der Ordnung p von Null verschieden sein. Es sei dies

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix}$$

Wir wollen eine Spalte und eine Zeile beliebig hinzufügen und damit die Determinante bilden:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} & a_{1r} \\ . & \dots & . & . \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} & a_{pr} \\ a_{s1} & \dots & a_{sp} & a_{sr} \end{vmatrix}$$

die identisch verschwinden wird, wie auch die Indices r, s gewählt sein mögen. Entwickeln wir also nach den Elementen der letzten Spalte, so ergiebt sich die Gleichung:

$$a_{1r}A_{1s} + a_{2r}A_{2s} + \cdots + a_{pr}A_{ps} + a_{sr}A = 0$$

wenn wir mit $A_{1s} \dots A_{ps}$ die mit geeigneten Vorzeichen versehenen Minoren der Ordnung p bezeichnen, die man aus A der Reihe nach durch Unterdrückung der Zeilen $1, 2, \dots p$ und Beifügung der s-ten Zeile gewinnt.

Lassen wir s sich von $(p+1)$ bis n ändern und addieren alle so erhaltenen Gleichungen, so ergiebt sich

$$\begin{array}{llll} a_{1r} & (A_{1,p+1} & + \cdots + A_{1n}) + \\ + a_{2r} & (A_{2,p+1} & + \cdots + A_{2n}) + \\ . & . & \dots \quad . \\ + a_{pr} & (A_{p,p+1} & + \cdots + A_{pn}) + \\ + a_{p+1,r}A & + a_{p+2,r}A & + \cdots + a_{nr}A & = 0 \end{array}$$

Diese Gleichung ist gültig für jedes beliebige $r = 1, 2, \dots m$, ist also eine lineare und homogene Gleichung mit unveränderlichen Koeffizienten zwischen den Elementen einer beliebigen Spalte. Hiermit ist der Lehrsatz als allgemeingiltig erwiesen.

Als besondere Fälle sind augenscheinlich aus diesen Lehrsätzen über verschwindende Matrices die entsprechenden für verschwindende Determinanten abzuleiten.

Aus der letzten Beweisführung ergiebt sich diese Folgerung.

Eine der Determinanten von der Ordnung p, die nicht verschwindet, wollen wir die Hauptdeterminante nennen und wollen diese, wie oben geschehen, mit A bezeichnen.

Damit die Matrix Null sei und den Rang p habe, genügt es vorauszusetzen, dass alle Determinanten verschwinden, die aus A durch Hinzufügung einer Zeile und einer Spalte hervorgehen.

Das Verschwinden sämmtlicher anderen Determinanten von der Ordnung $(p+1)$ ist eine Folge des Verschwindens der hier angedeuteten. Hat man nämlich eine beliebige Determinante von der Ordnung $(p+1)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{r_1 s_1} & \cdots & a_{r_1 s_{p+1}} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{r_{p+1} s_1} & \cdots & a_{r_{p+1} s_{p+1}} \end{vmatrix}$$

und multipliziert man jedes Element mit A, so ergiebt sich mit Rücksicht auf die gefundene allgemeine Beziehung:

$$\Delta A^{p+1} =$$

$$= \begin{vmatrix} -a_{1s_1}A_{1r_1} - \cdots - a_{ps_1}A_{pr_1} & , \cdots , & -a_{1s_{p+1}}A_{1r_1} - \cdots - a_{ps_{p+1}}A_{pr_1} \\ \cdot \quad \cdots \quad \cdot & , \cdots , & \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ -a_{1s_1}A_{1r_{p+1}} - \cdots - a_{ps_1}A_{pr_{p+1}} & , \cdots , & -a_{1s_{p+1}}A_{1r_{p+1}} - \cdots - a_{ps_{p+1}}A_{pr_{p+1}} \end{vmatrix}$$

Jedes Element einer solchen Determinante ist eine Summe von p Gliedern, während die Determinante von der Ordnung $(p+1)$ ist. Zerlegen wir diese Determinante mit vielgliedrigen Elementen in die entsprechende Zahl von Determinanten mit einfachen Elementen, so leuchtet ein, dass eine jede von diesen stets wenigstens mit zwei Spalten versehen erscheint, wovon die Elemente der einen beziehungsweise gleiche Vielfache der entsprechenden Elemente der andern sind und mithin ist eine jede solche Determinante gleich Null. Hieraus ergiebt sich, wenn A von Null verschieden ist, dass $\Delta = 0$, wie auch behauptet wurde.

Es giebt noch einen anderen wichtigen Lehrsatz über verschwindende Matrices, der als Verallgemeinerung eines von uns im § 5 (Siehe S. 20) für verschwindende Determinanten entwickelten Satzes angesehn werden kann und zwar ist dies der folgende:

Wenn eine verschwindende Matrix den Rang p besitzt, so sind die aus p Zeilen genommenen Minoren p-ter Ordnung proportional denen von gleicher Lage, genommen aus anderen p Zeilen, die im Ganzen oder nur theilweise von den ersteren verschieden sind.

Wir wollen hier nicht auf den Beweis dieses Lehrsatzes eingehen und statt dessen auf die Schrift von Capelli-Garbieri (Analisi algebrica, Padova 1886. S. 398) verweisen.

Wenn wir hier Halt machen, um der Zahl p, die als Rang einer Matrix eingeführt war, noch besondere Aufmerksamkeit zu widmen, wird uns der Nachweis für eine grundlegende Eigenschaft dieser Zahl leicht sein, die in gewisser Weise dazu dient, deren Wichtigkeit darzuthun.

Ist uns eine Matrix vorgelegt, so werden wir sagen, eine andere

sei aus ihr abgeleitet, wenn man sie durch eine oder mehrere der folgenden einfachsten Verfahrensweisen aus jener erhält (Siehe die eben angeführte Schrift Analisi algebrica):

1. Vertauschen zweier Zeilen oder zweier Spalten.

2. Die Elemente einer Zeile oder Spalte multiplizieren mit einer beliebigen Zahl.

3. Zu den Elementen einer Zeile oder Spalte die Elemente einer parallelen Reihe hinzufügen, nachdem letztere mit einer beliebigen Zahl multipliziert sind.

Es ist von Wichtigkeit zu beachten, dass, wenn eine Matrix aus einer anderen abgeleitet ist, die zweite auch wiederum als aus der ersten abgeleitet zu gelten hat.

Würde es sich um eine quadratische Matrix handeln, so würde eines dieser Verfahren nur die Wirkung haben, die aus jener Matrix bestimmte Determinante höchstens mit einer Zahl multipliziert erscheinen zu lassen.

Nun ist der folgende Lehrsatz bemerkenswerth:

Zwei Matrices, wovon eine die abgeleitete der andern ist, haben gleichen Rang.

Wenn man im Besonderen mittelst einer Behandlung, wie sie vorher angedeutet worden, aus einer Determinante eine andere von derselben Ordnung erhält, so wird beiden Determinanten der nämliche Rang zugehören.

Für den Fall der beiden ersteren Verfahren ist der Lehrsatz einleuchtend. Wir wollen zeigen, dass er sich auch für das dritte bewahrheitet. Setzen wir nämlich voraus, dass wir aus der gegebenen Matrix eine andere Matrix hergeleitet haben, indem wir zu den Elementen einer Zeile oder Spalte die einer parallelen Reihe, mit λ multipliziert, hinzufügten, so wird dann ein Minor der zweiten Matrix entweder einem Minor gleicher Ordnung der ersteren Matrix gleich sein (wenn zu seiner Bildung die veränderte Reihe gar nicht beigetragen hat) oder aber, er wird in der Form

$$A + \lambda B$$

zerlegbar sein, wo A, B zwei Minoren derselben Ordnung aus der ursprünglichen Matrix sind. Gleicherweise wird vermöge der Wechselbeziehung, die zwischen einer Matrix und der abgeleiteten Matrix besteht, jeder Minor der ersteren Matrix auf entsprechende Art vermittelst solcher der zweiten sich ausdrücken lassen. Hieraus folgt sofort, wenn nicht alle Minoren der Ordnung k in der ersten Matrix Null sind,

dass dann auch nicht alle Minoren gleicher Ordnung der zweiten Matrix Null sein werden, und wenn alle Minoren der Ordnung $(k+1)$ innerhalb der ersten Matrix verschwinden, dasselbe auch für alle diese Minoren der zweiten gelten wird.

Und damit ist der Nachweis unseres Lehrsatzes erbracht.

§ 56. Lineare Gleichungen.

Es sei ein System von m Gleichungen zwischen n Unbekannten vorgelegt:

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = y_1 \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdots \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases}$$

Man darf stets die Annahme machen, dass m grösser sei als n, weil, wenn dies nicht stattfände, man sich vorstellen könnte, es würden zu diesem Systeme von Gleichungen soviele weitere identische hinzugefügt, Gleichungen nämlich mit verschwindenden Koeffizienten und desgleichen verschwindenden bekannten Gliedern.

Wir wollen uns die Aufgabe stellen zu prüfen, in welcher Weise die Werthe der Unbekannten $x_1 \ldots x_n$ durch solche Gleichungen bestimmt sind oder nicht.

Wir werden als Matrix der Koeffizienten die Matrix bezeichnen:

$$(2)\qquad \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix} \equiv (A)$$

Es sei p der Rang dieser Matrix (Siehe den vorangehenden Paragraphen) und, um eine bestimmtere Vorstellung zu ermöglichen, nehmen wir an

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{p1} & \ldots & a_{pp} \end{vmatrix} \qquad (p \leqq n)$$

sei eine der Determinanten p-ter Ordnung, die in der Matrix enthalten und die von Null verschieden sind.

Wir bilden die Determinanten:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} & y_1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & \ldots & a_{pp} & y_p \\ a_{r1} & \ldots & a_{rp} & y_r \end{vmatrix} = \Delta_r$$

Für ein $r \leqq p$ sind diese Determinanten augenscheinlich gleich Null; für ein $r > p$ können sie im Gegentheil beliebige Werthe annehmen.

Wir beginnen mit der Darlegung des Satzes:

Wenn die gegebenen Gleichungen nicht unter einander widersprechend sein sollen, oder wenn sie, wie man sich auch ausdrückt, mit einander verträglich sein sollen, so ist erforderlich, dass alle Δ_r verschwinden.

Wir schreiben die vorgelegten Gleichungen in folgender Gestalt:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}\, x_1 + \cdots + a_{1p}\, x_p = y_1' \\ \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mp} x_p = y_m' \end{array} \right.$$

indem wir setzen:

$$\begin{array}{l} y_1' = y_1 - a_{1,p+1}\, x_{p+1} - \cdots - a_{1n}\, x_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ y_m' = y_m - a_{m,p+1} x_{p+1} - \cdots - a_{mn} x_n \end{array}$$

Wenn wir in den Δ_r an Stelle von $y_1 \ldots y_m$ einsetzen $y_1' \ldots y_m'$, so erhalten wir Determinanten, deren letzte Spalten mehrgliedrige Elemente enthalten; zerlegen wir sie nach der bekannten Regel, so ergiebt sich als ein erstes Glied das nämliche Δ_r, von dem wir ausgingen, und danach andere Glieder, die, abgesehen von Faktoren, Determinanten der Ordnung $(p+1)$ sind, ausgewählt innerhalb der ursprünglichen Matrix, die mithin unserer Annahme nach gleich Null sind. Es erhellt daher, dass die Δ_r ungeändert bleiben, wenn man für die y die y' einsetzt.

Wir betrachten die ersten p Gleichungen unter den (3) und dazu die r-te, nennen $A_1^{(r)}, A_2^{(r)}, \cdots A_p^{(r)}, A$ die algebraischen Komplemente der Elemente der letzten Spalte in Δ_r, multiplizieren beziehungsweise die $(p+1)$ angedeuteten Gleichungen mit $A_1^{(r)}, A_2^{(r)}, \cdots A_p^{(r)}, A$ und addieren sie dann. Leicht erkennt man, dass der Koeffizient von x_s zu Null wird und mithin auf der rechten Seite nur die Determinante übrig bleibt, die aus Δ_r entsteht, wenn man für die y die y' einsetzt, eine Determinante, die, wie besprochen wurde, gleich Δ_r ist. Also muss die Bedingung $\Delta_r = 0$ für jeden beliebigen Werth des Index r giltig sein.

Man beachte, dass es Determinanten Δ_r, wie wir sie aufgestellt hatten, der Zahl nach m giebt, und alle gebildet wurden, indem wir von der Determinante A ausgingen. Wenn wir nun eine beliebige

andere Determinante der Ordnung $(p+1)$ in Betracht ziehen, die dem oben dargestellten Δ_r in der Spalte der y wohl entspricht, sich aber von ihm durch die ersten p Spalten unterscheidet, so wird es auch stets diesen weiteren, entsprechend gestalteten Determinanten eigen sein, den Werth Null anzunehmen, wenn die Gleichungen mit einander verträglich sind und wenn die Charakteristik von (A) gleich p ist.

Wir wollen nun umgekehrt voraussetzen, dass die m Determinanten Δ_r, wie sie oben dargestellt wurden, verschwinden. Dann muss zunächst jede Determinante Δ'_r, die man aus Δ_r durch Einsetzen der y' für die y erhält, gleicherweise verschwinden, weil ja die Gleichungen $\Delta'_r = \Delta_r$ gelten.

Nach den Lehrsätzen über verschwindende Determinanten (man vergleiche den vorangehenden Paragraphen S. 192 ff.) müssen die Elemente der letzten Zeile in Δ'_r die gleichen linearen und homogenen Verbindungen der Elemente ihrer parallelen Reihen darstellen, oder mit anderen Worten:

Welches auch die Werthe der $x_{p+1} \dots x_n$ sein mögen, so werden nothwendig für jedes beliebige $r = p+1, \dots m$ Gleichungen bestehen von der Form:

$$\begin{aligned}
a_{r1} &= \alpha a_{11} + \beta a_{21} + \cdots + \mu a_{p1} \\
a_{r2} &= \alpha a_{12} + \beta a_{22} + \cdots + \mu a_{p2} \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\
a_{rp} &= \alpha a_{1p} + \beta a_{2p} + \cdots + \mu a_{pp} \\
y'_r &= \alpha y'_1 + \beta y'_2 + \cdots + \mu y'_p
\end{aligned}$$

In der letzten Gleichung hier wollen wir für die y' ihre Werthe einsetzen und beachten, dass diese Beziehungsgleichung bestehen bleiben muss, welche Werthe immer den $x_{p+1} \dots x_n$ zugetheilt werden mögen. Damit löst sich die letzte Gleichung in die folgenden weiteren Gleichungen auf:

$$\begin{aligned}
y_r &= \alpha y_1 + \beta y_2 + \cdots + \mu y_p \\
a_{r,p+1} &= \alpha a_{1,p+1} + \beta a_{2,p+1} + \cdots + \mu a_{p,p+1} \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\
a_{rn} &= \alpha a_{1n} + \beta a_{2n} + \cdots + \mu a_{pn}
\end{aligned}$$

Durch die Gesammtheit dieser Gleichungen wird angezeigt, dass, wenn wir die ersten p unter den Gleichungen (1) beziehungsweise mit $\alpha, \beta, \dots \mu$ multiplizieren und dann addieren, genau die r-te Gleichung des Systems (1) hervorgeht; also ist diese r-te Gleichung eine

Folge der p ersten. Da nun r irgend einer unter den Zahlen $(p+1)\dots m$ gleich sein kann, so ergiebt sich:

Wenn alle Δ_r gleich Null sind, so erscheint das System der m vorgelegten Gleichungen auf das System der p ersten zurückgeführt; oder auch die letzten $(m-p)$ Gleichungen des Systems sind dann nur lineare Verbindungen der p ersten.

Wir wollen uns somit nur mit den p ersten Gleichungen in der Form (3) beschäftigen.

Wir multiplizieren sie beziehungsweise mit den algebraischen Komplementen der Elemente der i-ten Spalte innerhalb der Determinante A und addieren dann.

Die Koeffizienten von $x_1 \dots x_{i-1}\ x_{i+1} \dots x_p$ werden Null, weil sie als die Summen von Produkten erscheinen, in denen die Elemente einer Spalte von A mit den algebraischen Komplementen der Elemente einer parallelen Spalte multipliziert sind. Der Koeffizient von x_i ergiebt sich gleich der Determinante A und in Folge dessen wird

$$Ax_i = A^{(i)}$$

wobei $A^{(i)}$ die Determinante bezeichnet, die man aus A durch Einsetzen der Elemente $y_1' \dots y_p'$ für die Elemente der i-ten Spalte erhält.

Da A von Null verschieden ist, so geht aus dieser Formel hervor:

$$x_i = \frac{A^{(i)}}{A} \tag{4}$$

Verweilen wir einen Augenblick bei der Betrachtung dieses Ergebnisses. Ist $p = n$, so befindet sich auf der rechten Seite der Gleichung eine Grösse, die von den x nicht mehr abhängig ist, und mithin liefert diese Formel dann für die $x_1 \dots x_p$ bestimmte endliche Werthe.

Überdies lässt in dem Fall das System nur eine Lösung zu, weil ja die Gleichungen (4) für x_i einen einzigen Werth darbieten.

Ist $p < n$, dann erscheint die rechte Seite als ein linearer Ausdruck in $x_{p+1} \dots x_n$. Theilen wir diesen Veränderlichen beliebige endliche Werthe zu, so ergeben sich endliche und bestimmte Werthe für die $x_1 \dots x_p$. Das System der vorgelegten Gleichungen bestimmt dann die Unbekannten nicht auf eine einzige Weise, sondern $(n-p)$ von ihnen können beliebige Werthe zugewiesen werden und die übrigen p erscheinen dann eindeutig bestimmt. Lösungen des Systems giebt es dann in unendlicher Anzahl und eigentlich $(n-p)$-fach unendlich viele, weil wir ja $(n-p)$ Unbekannten beliebige Werthe zuweisen dürfen. Jede mögliche Lösung des Systems kann dann nur

inbegriffen sein unter den auf diese Weise erhaltenen Lösungen, weil vorausgesetzt, dass

$$x_1 = a_1, \ldots x_p = a_p, x_{p+1} = a_{p+1}, \ldots x_n = a_n$$

eine Lösung des gegebenen Systems sei, diese gleichzeitig den ersten p Gleichungen von der Form (3) Genüge leisten muss und auch den Gleichungen (4). Wenn man in diesen letzteren $x_{p+1} = a_{p+1}, \ldots x_n = a_n$ setzt, kann man nur den einen Werth a_i für x_i erhalten, da die Gleichungen (4) für x_i $(i = 1, 2, \ldots p)$ einen einzigen Werth liefern, wenn $x_{p+1} \ldots x_n$ festgelegt sind.

Man sieht, es genügt die Voraussetzung, alle Δ_r seien gleich Null, um behaupten zu können, dass stets wenigstens eine Lösung des Systems vorhanden sei; andrerseits ist die Bedingung $\Delta_r = 0$ auch nothwendig dafür, dass die Gleichungen mit einander verträglich sind, oder dass eine Lösung überhaupt möglich ist. Also sind die Bedingungen $\Delta_r = 0$ $(r = 1, 2, \ldots m)$ nothwendig und hinreichend für die Verträglichkeit der Gleichungen (1).

Eine Folgerung, die diesem Lehrsatze in Verbindung mit der Bemerkung auf S. 198 f. entstammt, ist es, wenn wir sagen:

Verschwinden die oben dargestellten m Determinanten Δ_r, so werden auch, bei der dann eintretenden Verträglichkeit der vorgelegten Gleichungen, alle die übrigen Determinanten der Ordnung $(p + 1)$ verschwinden, die den Δ_r entsprechen, jedoch in den ersten p Spalten von ihnen abweichen.

Wir können den gedachten Bedingungsgleichungen eine knappere und geschmackvollere Gestalt verschaffen.

Capelli, Sopra la compatibilità o incompatibilità di più equazioni di primo grado fra più incognite. Riv. di mat. t. 2 (1892) [54—58].

Betrachten wir die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & y_1 \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & y_m \end{matrix} \right\| = (B)$$

Es kann diese Matrix nicht zum Rang eine Zahl besitzen, die kleiner als p wäre, weil ja wenigstens die Determinante der ersten p Zeilen und Spalten von Null verschieden ist, nämlich die Determinante A.

Die (B) zugehörigen Determinanten der Ordnung $(p + 1)$ sind entweder in der Matrix (A) der Koeffizienten enthaltene Determinanten oder aber Determinanten von der Form der Δ_r. Doch im einen wie

im andern Falle sind sie Null, wenn (A) vom Range p ist, und wenn die Gleichungen mit einander verträglich sind.

Wir können mithin aussprechen, dass bei dieser Voraussetzung auch der Matrix (B) der Rang p zugehört. Andrerseits, wenn ihre Rangzahl p ist, so leuchtet ein, dass alle Δ_r Null sind, weil es ja Determinanten der Ordnung $(p+1)$ sind. Somit ist der Schluss erlaubt:

Sollen die gegebenen Gleichungen mit einander verträglich sein, oder, was damit übereinkommt, sollen sie eine oder mehrere Lösungen zulassen, so ist nothwendig und hinreichend, dass die Matrix der Koeffizienten und die Matrix (B) die nämliche Rangzahl besitzen.

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so ist, wie wir zeigten, das System von m Gleichungen auf ein System von nur p Gleichungen zurückgeführt und die übrigen $(m-p)$ sind von diesen abhängig. Die p Gleichungen sind sicher unabhängig, das heisst, es besteht nicht zwischen ihnen irgendwelche lineare homogene Beziehung, da ja andernfalls zwischen den Elementen der Spalten von A eine gleiche lineare homogene Beziehung statthaben würde und A damit gegen die Annahme verschwinden würde.

Also können wir den Satz aussprechen:

Der Rang p der Matrix des Systems stellt die grösste Anzahl von unter einander unabhängigen Gleichungen dar, die in dem gegebenen Systeme enthalten sind.

Nun ist es nützlich, den besonderen Fall anzumerken, wo die Zahl der Gleichungen mit derjenigen der Unbekannten übereinstimmt, $m = n$.

Wenn dann die Determinante der Koeffizienten von Null verschieden ist, wird die Rangzahl p gleich n sein und das System wird stets eine einzige Lösung gestatten; wenn im Gegentheil die Determinante der Koeffizienten Null ist und den Rang p besitzt, und p auch als Rang derjenigen Matrix zugehört, die entsteht, wenn man zur Matrix der Determinante der Koeffizienten die Spalte der rechtsseitigen Glieder der vorgelegten Gleichungen hinzufügt, so sind diese verträglich, kommen auf nur p von einander unabhängige zurück und lassen unendlich viele Lösungen zu. (∞^{n-p}).

Ist $m = n + 1$, übersteigt also die Zahl der Gleichungen die der Unbekannten um eine Einheit, dann wird die Matrix (B) zur Matrix

einer Determinante der Ordnung $(n+1)$. Die Matrix der Koeffizienten enthält Determinanten höchstens von der Ordnung n. Es muss also, damit die $(n+1)$ Gleichungen zusammen bestehen können, die Matrix (B) eine Rangzahl besitzen, die kleiner als $(n+1)$ ist, und hiernach muss die Determinante der Ordnung $(n+1)$ Null sein, mit andern Worten:

Damit $(n+1)$ Gleichungen zwischen n Unbekannten neben einander bestehen können, muss die Determinante der Koeffizienten und der bekannten Glieder verschwinden.

Wir wollen nunmehr den Fall in Betracht ziehen, wo in den gegebenen Gleichungen auf der rechten Seite überall Null erscheint, also m lineare Gleichungen vorgelegt sind der Gestalt:

$$(5) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Solche Gleichungen pflegt man homogen zu nennen.

Es sind dann die oben behandelten Determinanten Δ_r sicher alle Null, mithin giebt es stets wenigstens eine Lösung des Systems. Dem entsprechend wird ja thatsächlich in diesem Fall immer wenigstens die Lösung

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad \ldots \quad x_n = 0$$

vorhanden sein.

Aus der vorausgehenden Erörterung ergiebt sich auch, dass, wenn der Rang der Matrix der Koeffizienten den Werth $p = n$ hat, dann eine einzige Lösung besteht, und diese kann daher nur die soeben angegebene sein, sodass wir schliessen dürfen:

Damit ein System von homogenen Gleichungen eine Lösung gestatte, die verschieden ist von der augenfälligen Lösung $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, ist nöthig, dass der Rang der Matrix der Koeffizienten kleiner sei als n, also kleiner, als die Anzahl der Unbekannten.

Offenbar kann der Rang dieser Matrix weder grösser sein, als m, noch als n und wird höchstens der kleineren dieser beiden Zahlen gleich kommen können. Ist $m < n$, dann werden sich, da doch sicherlich die Rangzahl p kleiner als n sein wird, mit Bestimmtheit für die Unbekannten Werthe finden lassen, die nicht sämmtlich Null sind und die allen Gleichungen Genüge leisten.

Für $m = n$ erhält man den Satz:

Damit ein System von n linearen homogenen Gleichungen in n Unbekannten durch Werthe der Unbekannten, die nicht sämmtlich Null sind, befriedigt werde, muss die Determinante des Systems Null sein.

Für ein System von solcher Beschaffenheit kann also der Höchstbetrag der Rangzahl p gleich $(n - 1)$ sein. Aus unserer allgemeinen Darlegung geht hervor, dass dann hier für die x eine einfach unendliche Schaar $(n - (n - 1) = 1)$ von Werthen auftritt, die den Gleichungen Genüge leisten, und dass überdies $(n - 1)$ Gleichungen unabhängig sind und die letzte eine Folge der ersteren.

Ein Minor von der Ordnung $(n - 1)$, und von Null verschieden, sei der in den ersten $(n - 1)$ Spalten und Zeilen enthaltene; es sind dann unabhängig die $(n - 1)$ Gleichungen:

$$(6) \qquad \begin{cases} a_{11} \quad x_1 + \cdots + a_{1n} \quad x_n = 0 \\ \cdot \qquad \cdots \qquad \cdot \qquad \cdot \\ a_{n-1,1} x_1 + \cdots + a_{n-1,n} x_n = 0 \end{cases}$$

Wir wollen mit

$$A_{n1}\,,\ A_{n2}\,,\ \ldots\ A_{nn}$$

die algebraischen Komplemente der Elemente der letzten Zeile bezeichnen innerhalb der Determinante n-ter Ordnung der a.

Diese algebraischen Komplemente sind nichts andres, als die Determinanten von der Ordnung $(n - 1)$, welche in der Matrix der Koeffizienten aus den Gleichungen (6) vorkommen.

Nach den Eigenschaften der Determinanten werden offenbar, wenn wir an Stelle der x im System (6) die Grössen

$$\varrho A_{n1}\,,\ \varrho A_{n2}\,,\ \ldots\ \varrho A_{nn}$$

einsetzen, wobei ϱ eine beliebige Grösse vorstellt, die Gleichungen (6) alle identisch befriedigt. Diese Grössen sind hiernach die Lösungen des Systems, der Zahl nach eine einfach unendliche Schaar.

Mithin gilt der Satz:

Hat man $(n - 1)$ lineare homogene Gleichungen in n Unbekannten, deren Matrix verschieden von Null und vom Range $(n - 1)$ ist (siehe den vorausgehenden Paragraphen), so sind die Unbekannten proportional den Minoren der Ordnung $(n - 1)$, die in solcher Matrix enthalten sind.

Nach der kürzlich geschehenen Anmerkung, dass die Rangzahl p die kleinere der beiden Zahlen m und n nicht überschreiten kann, und in Erinnerung dessen, dass p gerade die Anzahl der linearen

Gleichungen vorstellt, die von einander unabhängig sind, kommen wir zu dem Ausspruch:

Es kann nicht mehr als n von einander unabhängige, lineare homogene Gleichungen mit n Unbekannten geben.

Die Frage, die wir in diesem Abschnitt behandelt haben, nach der Auflösung der linearen Gleichungen, ist namentlich für die Lehre von den Determinanten von hoher geschichtlicher Bedeutung. Es ist die Frage, die gewissermaassen zu dem Gedankengebilde der Determinanten selbst die Veranlassung gegeben hat.

Die Formel (4) heisst die Formel von Cramer, weil sie in gewissem Sinne als von diesem Schriftsteller aufgestellt gelten darf in einer zu seiner Zeit berühmten Schrift:

Cramer, Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. Genève 1750. Appendice: De l'évanouissement des inconnues. S. 658.

Die Frage wurde dann, zugleich mit der andern der Elimination, der sie nahe verwandt ist, von Euler, Bezout, Vandermonde und Laplace behandelt.

Euler, Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des équations. Mém. de l'ac. Berlin. t. 20. année 1764 (1766) [91—104].

Bezout, Recherches sur le dégré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations. Mém. de l'ac. Paris t. 33. année 1764 (1768) 8⁰ [483—568].

Vandermonde, a. a. O. oben S. 38. Mém. de l'ac. Paris. Année 1772. Sec. partie (1776) [516—532].

Laplace, a. a. O. oben S. 38. Mém. de l'ac. Paris. Année 1772. Sec. partie (1776) [267—376] Article 4.

Bezout, Théorie générale des équations algébriques. Paris 1779.

Die Einführung des Begriffes Rang (Charakteristik), mittelst dessen sich die Behandlung der Aufgabe so allgemein und geschmackvoll gestalten lässt, ist neueren Ursprungs. Von deutschen Schriftstellern haben hauptsächlich Frobenius und Kronecker sich dieses fruchtbaren Begriffes bedient. (Siehe Encycl. d. math. Wiss. IB1b. Art. 12. Anm. 46.) Man vergleiche übrigens

Baltzer, Det. 1881. S. 73 Anm.

Rouché, Sur la discussion des équations du premier degré. C. R. t. 81. juillet — décembre 1875 [1050—1052].

D'Ovidio, Ricerche sui sistemi indeterminati di equazioni lineari. Acc. di Tor. vol. 12. 1876—77 [334—349].

Capelli, in seiner oben (S. 201) angeführten Note.

Garbieri, a. a. O. Siehe Literaturbericht zu § 57. Atti Acc. Gioenia vol. 6. ser. 4 (1893), sowie die schätzbaren Behandlungen der Algebra von Cesàro (Torino, 1894) und Capelli (Napoli 1895).

Es lassen sich die Determinanten auch verwerthen bei Auflösung eines Systems von Gleichungen, die nicht alle linear sind. Für den Fall eines Systemes, das aus (n — 1) linearen und einer quadratischen Gleichung besteht, vergleiche man:

Baur, Auflösung eines Systems von Gleichungen, worunter eine quadratisch, die andern linear. Zeitschr. f. Math. 14. Jahrg. (1869) [129—140].

Versluys, Applications des déterminants à l'algèbre et à la géométrie analytique. Arch. d. Math. 53. Theil (1871) [137—187].

Zur Auflösung eines Systems von (n — 2) linearen und zwei quadratischen Gleichungen ist nachzulesen:

Gundelfinger, Auflösung eines Systems von Gleichungen, worunter zwei quadratisch und die übrigen linear. Zeitschr. f. Math. 18. Jahrg. (1873) [543—551].

§ 57. Die Resultante zweier Gleichungen. Die Diskriminante einer Gleichung.

Die Resultante zweier Gleichungen ist eine ganze rationale Funktion in den Koeffizienten der beiden Gleichungen und zwar eine solche, deren Verschwinden nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass die beiden Gleichungen eine gemeinsame Wurzel haben.

Die Resultante wurde zuerst von Euler aufgestellt.

Euler, Demonstration sur le nombre des points, ou deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper. Mém. de l'ac. Berlin. t. 4. année 1748 (1750) [234—248].

Euler, a. a. O. oben S. 205. Mém. de l'ac. Berlin. t. 20. année 1764 (1766) [91—104] S. 96 ff.

Bezout, a. a. O. oben S. 205. Mém. de l'ac. Paris. année 1764. t. 33. Amsterdam 1768 [483—568].

Lagrange, Sur l'élimination des inconnues dans les équations. Mém. de l'ac. Berlin. t. 25. année 1769 (1771) [303—318] = Oeuvr. de Lagrange t. 3. Paris 1869 [141—154].

Jacobi benutzte zu diesem Zwecke die Determinanten. Man vergleiche

Jacobi, De eliminatione variabilis e duabus aequationibus algebraicis. Journ. f. Math. Bd. 15 (1835) [101—124], wieder abgedruckt in Jacobi, Ges. Werke, Bd. 3. Berlin 1884 [297—320].

Weiterhin ist noch hinzuweisen auf:

Sylvester, A method of determining by mere inspection the derivatives from two equations of any degree. Phil. Mag. vol. 16 (1840) [132—135].

Richelot, Nota ad theoriam eliminationis pertinens. Journ. f. Math. Bd. 21 (1840) [226—234].

Hesse, Über die Bildung der Endgleichung, welche durch Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen hervorgeht, und die Bestimmung ihres Grades. Journ. f. Math. Bd. 27 (1844) [1—5], wieder abgedruckt in Hesse, Gesammelte Werke. München 1897 [83—88].

Rosenhain, Exercitationes analyticae in theorema Abelianum de integralibus functionum algebraicarum. Journ. f. Math. Bd. 28 (1844) [249—278].

Rosenhain, Neue Darstellung der Resultante der Elimination von z aus zwei algebraischen Gleichungen $f(z) = 0$ und $\varphi(z) = 0$ vermittelst der Werthe, welche die Funktionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ für gegebene Werthe von z annehmen. Journ. f. Math. Bd. 30 (1845) [157—165].

Sylvester, On a theory of the syzygetic relations of two rational integral fonctions. Phil. Tr. 1853. vol. 143. part. 1 [407—548].

Hermite, Extrait d'une lettre de Mr. Ch. Hermite de Paris à Mr. Borchardt de Berlin sur le nombre des racines d'une équation algébrique comprises entre des limites données. Journ. f. Math. Bd. 52 (1856) [39—51].

Cayley, Memoir on the resultant of a system of two equations. Phil. Trans. vol. 147. part. 3 (1857) [703—715] = Coll. math. pap. vol. 2. Cambridge 1889. N. 148 [440—453].

Cayley, Note sur la méthode d'élimination de Bezout. Journ. f. Math. Bd. 53 (1857) S. 366 f. = Coll. math. pap. vol. 4. Cambridge 1891. S. 38 f.

Borchardt, Remarque relative à la note précédente (de M. Cayley). Journ. f. Math. Bd. 53 (1857) S. 367 f., wieder abgedruckt in Borchardts Werken S. 473 f.

Brioschi, Sur une nouvelle propriété du résultant de deux équations. Journ. f. Math. Bd. 53 (1857) [372—376].

Faà di Bruno, Note sur un théorème de M. Brioschi. Journ. f. Math. Bd. 54 (1857) S. 283 f.

Borchardt, a. a. O. Siehe oben S. 130. Akad. Berlin, Ber. 1859 [376—388] = Journ. f. Math. Bd. 57 (1860) [111—121].

Borchardt, Vergleichung zweier Formen der Eliminations-Resultante. Journ. f. Math. Bd. 57 (1860) [183—186], wieder abgedruckt in Borchardts Werken [147—150].

Cayley, Note sur l'élimination. Journ. f. Math. Bd. 60 (1862) S. 373 f., wieder abgedruckt in Cayley, Coll. math. pap. vol. 5. Cambridge 1892 [157—159].

Clebsch, Über die Elimination aus zwei Gleichungen dritten Grades. Journ. f. Math. Bd. 64 (1865) [95—97].

Kronecker, Über einige Interpolationsformeln für ganze Funktionen mehrer Variabeln. Akad. Berlin, Ber. 1865 [686—691], wieder abgedruckt in Kronecker Werke. Bd. 1. Leipzig 1895 [135—141].

Baltzer, Mathematische Bemerkungen. Ber. d. Ges. d. Wiss. Leipzig. Bd. 25. 1873 [523—537] S. 530 f. (Vergl. auch Baltzer, Determ. § 11.)

Darboux, Sur la théorie de l'élimination entre deux équations à une inconnue. Bull. sc. math. t. 10. prem. sem. (1876) [56—64].

Darboux, Sur l'élimination entre deux équations algébriques à une inconnue. Bull. sc. math. 2e. sér. t. 1 (1877) [54—64].

Igel, Einige Sätze und Beweise zur Theorie der Resultante. Akad. Wien. Ber. Bd. 76. 2. Abth. (1877) [145—168].

Lemonnier, Mémoire sur l'élimination. Ann. de l'éc. norm. 2e. sér. t. 7 (1878) [77—100, 151—214].

Kronecker, Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen. Akad. Berlin, Ber. 1881 [535—600], wieder abgedruckt in Kronecker, Werke. Bd. 2. Leipzig 1897 [115—192].

Hioux, Racines communes à deux équations algébriques entières. Ann. de l'éc. norm. 2e. sér. t. 10 (1881) [383—390]; t. 11 (1882) S. 135 f.

Stéphanos, Mémoire sur la théorie des formes binaires et sur l'élimination. Ann. de l'éc. norm. 3e. sér. t. 1 (1884) [329—388]. Siehe S. 376 ff. Abschn. 8: Sur la théorie du plus grand commun diviseur.

Scheibner, Mathematische Bemerkungen (Auszüge aus Briefen an Prof. Baltzer) Ber. d. Ges. d. Wiss. Leipzig. Bd. 40. 1888. S. 1—3. — Die Darstellung der Theorie des grössten gemeinschaftlichen Theilers zweier ganzen Funktionen angehend in Baltzer Det. 1881 S. 117. —

Stahl, Über eine neue Darstellung der Resultanten zweier Formen gleicher Ordnung. M. A. Bd. 35 (1890) [395—400].

Garbieri, Introduzione a una teorica dell' eliminazione. Giorn. di Batt. vol. 30 (1892) [41—105].

Garbieri, Sulla teoria della eliminazione fra due equazioni. Atti acc. Gioenia, anno 70. vol. 6. ser. 4 (1893) [1—9].

Lüroth, Kurze Ableitung der Bedingungen, dass zwei algebraische Gleichungen mehrere Wurzeln gemein haben. Zeitschr. f. Math. 40. Jahrg. (1895) [247—251].

Meyer, Über die Struktur der Diskriminante und Resultante von binären Formen. Act math. Bd. 19 (1895) [385—395].

Noether, Über den gemeinsamen Faktor zweier binären Formen. Erlangen. Ber. 27. Heft (1895) [110—115].

Netto, Zur Theorie der Resultanten. Journ. f. Math. Bd. 116 (1896) [33—49].

Zur Ergänzung dieses Quellenverzeichnisses benutze man als Wegweiser in dem vorliegenden Forschungsgebiete Encycl. d. math. Wiss. I B 1 a. Art. 16—19.

Die Beschäftigung mit der Resultanten erscheint von besonderer Wichtigkeit im Hinblick auf die Lehre von den Invarianten, wenn man ihren Ausdruck vermittelst der fundamentalen Invarianten des Systems zweier gegebenen algebraischen Formen beachtet. Es sind in dieser Richtung sehr viele Untersuchungen durchgeführt worden, wir können uns jedoch hier auf deren Erörterung nicht einlassen.

Wir werden uns darauf beschränken, die Resultante von dem Gesichtspunkte der Determinanten aus zu behandeln.

Es giebt mancherlei Formen für die Determinante, durch die die Resultante zweier Gleichungen sich darstellen lässt, und dies rührt von der Verschiedenheit der Wege her, die man dabei verfolgen kann. So lässt die Methode von Bezout eine Determinante n-ter Ordnung entstehen (wenn n nämlich die grössere der beiden Zahlen ist, die die Grade der gegebenen Gleichungen ausdrücken), die Methode von Euler lässt zu demselben Ergebniss gelangen, auf das man mit der sogenannten dialytischen Methode Sylvesters geräth, sie giebt aber eine Determinante der Ordnung $(m + n)$, wenn m, n die Grade der beiden Gleichungen sind.

Die vorgelegten Gleichungen mögen sein:

$$\varphi(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \cdots + a_m = 0$$
$$\psi(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \cdots + b_n = 0$$

Multiplizieren wir die erste mit

$$x^{n-1},\ x^{n-2},\ \cdots\ x, 1$$

und die zweite mit

$$x^{m-1},\ x^{m-2},\ \cdots\ x, 1,$$

so erhalten wir im Ganzen $(n + m)$ Gleichungen, die gleichzeitig bestehen müssen, wenn die beiden gegebenen Gleichungen von einer und derselben Wurzel x befriedigt werden. Diese $(n + m)$ Gleichungen sind linear und nicht homogen in den

$$x^{n+m-1},\ x^{n+m-2},\ \cdots\ x^2, x,$$

die der Zahl nach $(n + m - 1)$ sind.

Damit diese $(n + m)$ linearen Gleichungen mit einander verträglich sind (Siehe S. 202 f.), muss die folgende $(n + m)$-reihige Determinante der Koeffizienten $a_0 \ldots a_m\ b_0 \ldots b_n$ verschwinden:

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots \\ 0 & 0 & b_0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}$$

Diese Determinante ist vom Grade n in den Koeffizienten von φ und vom Grade m in denen von ψ.

Das Verschwinden dieser Determinante ist nun, wie wir leicht zeigen können, auch die hinreichende Bedingung dafür, dass die beiden Gleichungen eine gemeinsame Wurzel besitzen.

Wir wollen also nachweisen, dass, wenn $R = 0$ ist, sicherlich die beiden Gleichungen wenigstens eine gemeinsame Wurzel haben. Der Einfachheit wegen nehmen wir an $m = 3$, $n = 2$; dann wird die Determinante R werden:

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Wir wollen nun die linearen und homogenen Gleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned} a_0\lambda_1 \qquad\qquad + b_0\lambda_3 \qquad\qquad\qquad &= 0 \\ a_1\lambda_1 + a_0\lambda_2 + b_1\lambda_3 + b_0\lambda_4 \qquad\quad &= 0 \\ a_2\lambda_1 + a_1\lambda_2 + b_2\lambda_3 + b_1\lambda_4 + b_0\lambda_5 &= 0 \\ a_3\lambda_1 + a_2\lambda_2 \qquad\quad + b_2\lambda_4 + b_1\lambda_5 &= 0 \\ a_3\lambda_2 \qquad\qquad\qquad + b_2\lambda_5 &= 0 \end{aligned}$$

Die Determinante dieser Gleichungen ist gerade unser R. Wenn also R gleich Null wird, so ergiebt sich, nach den Erörterungen über lineare homogene Gleichungen (Siehe S. 203 f.), dass es Werthe der Unbekannten λ giebt, die nicht sämmtlich Null sind und die alle Gleichungen befriedigen. Sind dann die Werthe der λ auf solche Art bestimmt, so multipliziere man beziehungsweise

$$
\begin{array}{rcl}
x\varphi(x) & \text{mit} & \lambda_1 \\
\varphi(x) & \text{mit} & \lambda_2 \\
x^2\psi(x) & \text{mit} & \lambda_3 \\
x\psi(x) & \text{mit} & \lambda_4 \\
\psi(x) & \text{mit} & \lambda_5
\end{array}
$$

und addiere darauf. Man sieht leicht ein, dass man als Ergebniss identisch Null erhält. Also wird identisch:

$$(\lambda_1 x + \lambda_2)\varphi(x) + (\lambda_3 x^2 + \lambda_4 x + \lambda_5)\psi(x) = 0$$

und hieraus folgt (da $\varphi(x)$ vom 3. Grade ist), dass wenigstens eine der Wurzeln von $\varphi(x) = 0$ auch eine Wurzel von $\psi(x) = 0$ sein muss, da ja der andere Faktor im zweiten Gliede dieser Gleichung nur vom 2. Grade ist in x und daher nicht alle drei Wurzeln von φ auch seine Wurzeln sein können.

Aus dieser Betrachtung gewinnen wir die weitere wichtige Folgerung, eine Eigenschaft der Determinante R betreffend. Ist $R = 0$, so bestehen nicht nur neben einander die linearen homogenen Gleichungen:

$$
\begin{array}{l}
a_0\mu_1 + a_1\mu_2 + a_2\mu_3 + a_3\mu_4 = 0 \\
a_0\mu_2 + a_1\mu_3 + a_2\mu_4 + a_3\mu_5 = 0 \\
b_0\mu_1 + b_1\mu_2 + b_2\mu_3 = 0 \\
b_0\mu_2 + b_1\mu_3 + b_2\mu_4 = 0 \\
b_0\mu_3 + b_1\mu_4 + b_2\mu_5 = 0
\end{array}
$$

sondern aus der oben angedeuteten Beweisführung ergiebt sich auch, dass sie befriedigt werden, wenn man setzt:

$$\mu_1 = x^4, \quad \mu_2 = x^3, \quad \mu_3 = x^2, \quad \mu_4 = x, \quad \mu_5 = 1$$

wobei x jene gemeinsame Wurzel der beiden Gleichungen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ ist. Indessen folgt aus der Lehre von den linearen Gleichungen, dass die Werthe μ, die dem vorangehenden Systeme genügen, proportional sind den algebraischen Komplementen (diese von Null verschieden vorausgesetzt) der Elemente einer beliebigen Zeile innerhalb der Determinante R des Systems. Also gilt der Satz:

Wenn R gleich Null ist, so sind die algebraischen Komplemente der Elemente aus einer seiner Zeilen (wenn sie nicht Null sind) proportional den auf einander folgenden Potenzwerthen einer und derselben Grösse, das heisst, sie bilden eine geometrische Reihe.

Überdies können wir auch den Werth der gemeinsamen Wurzel beider Gleichungen herleiten, da doch augenscheinlich nach unserer Darlegung der Werth der gemeinsamen Wurzel gleich kommt dem Verhältniss der algebraischen Komplemente von zwei auf einander folgenden Elementen innerhalb einer beliebigen Zeile von R.

Machen wir nun die Annahme, dass alle algebraischen Komplemente der Elemente von R verschwinden, dann lassen die linearen Gleichungen bezüglich λ eine doppelt unendliche Schar von Lösungen zu. Daher können wir für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ zwei verschiedene Werthsysteme auffinden, welche sich von einander nicht blos um einen Proportionalitätsfaktor unterscheiden. In Folge davon erhalten wir zwei Identitäten der Gestalt:

$$(\lambda_1 x + \lambda_2)\,\varphi(x) + (\lambda_3 x^2 + \lambda_4 x + \lambda_5)\,\psi(x) = 0$$
$$(\lambda_1' x + \lambda_2')\,\varphi(x) + (\lambda_3' x^2 + \lambda_4' x + \lambda_5')\,\psi(x) = 0$$

und wenn wir die erste mit λ_3' multiplizieren, die zweite mit λ_3 und subtrahieren, so ergiebt sich:

$$[(\lambda_1\lambda_3' - \lambda_1'\lambda_3)x + (\lambda_2\lambda_3' - \lambda_2'\lambda_3)]\,\varphi(x) +$$
$$+ [(\lambda_4\lambda_3' - \lambda_4'\lambda_3)x + (\lambda_5\lambda_3' - \lambda_5'\lambda_3)]\,\psi(x) = 0$$

Hieraus kann man entnehmen, dass wenigstens zwei Wurzeln von $\varphi(x) = 0$ (und dies ist vom 3. Grade) unter denjenigen von $\psi(x) = 0$ enthalten sein müssen, weil ja der Faktor, der in dieser Identität mit ψ multipliziert erscheint, nur vom 1. Grade ist.

Fährt man so fort, so erhält man schliesslich dies allgemeine Ergebniss:

Wenn $R = 0$ ist, so haben die beiden Gleichungen sicher wenigstens eine gemeinsame Wurzel; es ändert sich aber nach dem Werthe des Ranges von R die Anzahl der beiden Gleichungen gemeinsamen Wurzeln; im Besonderen, wenn die Rangzahl von R $(m + n - k)$ beträgt, also alle Minoren von höherer Ordnung als $(m + n - k)$ Null sind ohne dass die von der Ordnung $(m + n - k)$ sämmtlich verschwinden, dann werden die beiden Gleichungen k gemeinsame Wurzeln besitzen.

Auf diese Weise sind wir dazu geführt, diese weitere, noch allgemeinere Frage aufzuwerfen: Welches sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass zwei Gleichungen k gemeinsame Wurzeln zulassen? Die kurz vorher aufgefundenen

Bedingungen stellen sich hier nur als die hinreichenden, nicht als die nothwendigen dar.

Diese Bedingungen werden sich uns in einer Gestalt darbieten, die ziemlich einfach und derjenigen der oben aufgefundenen hinreichenden Bedingungen entsprechend ist, wenn wir eine andere Form der Resultante in Betracht ziehen und zwar gerade die nach Bezout benannte Form. Wir werden hierin den beiden schon (Siehe S. 207) angeführten Aufsätzen von Darboux folgen.

Wesentlich ist es, hier anzumerken, dass man eine entsprechende Untersuchung, die jedoch die Resultante nicht in der Form von Bezout, sondern in der von Euler behandelt, Garbieri zu verdanken hat, in seinem Aufsatze: Sulla teoria dell' eliminazione fra due equazioni (Siehe oben S. 207). Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass p gemeinsame Wurzeln vorhanden sind, wurden von Kronecker gegeben, indem er die Determinanten einer gewissen Folge, an deren Anfang die Resultante steht, gleich Null setzte. (Siehe Kronecker, Akad. Berlin, Ber. 1881; Netto, Journ. f. Math. Bd. 116.)

Wir wollen die Methode von Bezout nach ihren Hauptzügen angeben.

Wir beginnen mit der Voraussetzung, dass die beiden Gleichungen desselben Grades sind, also $m = n$.

Multiplizieren wir die erste mit b_0 und die zweite mit a_0 und subtrahieren, so ergiebt sich eine Gleichung vom Grade $(n - 1)$ der Gestalt:

$$(a_1 b_0 - a_0 b_1) x^{n-1} + (a_2 b_0 - a_0 b_2) x^{n-2} + \cdots + (a_n b_0 - a_0 b_n) = 0$$

Multiplizieren wir nun die erste Gleichung mit

$$b_0 x + b_1$$

und die zweite mit

$$a_0 x + a_1$$

und subtrahieren, so erhalten wir noch eine Gleichung vom Grade $(n - 1)$ und zwar:

$$(a_2 b_0 - a_0 b_2) x^{n-1} + [(a_3 b_0 - a_0 b_3) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)] x^{n-2} + \cdots = 0$$

Wir können in dieser Weise fortfahren, indem wir die erste Gleichung mit

$$b_0 x^2 + b_1 x + b_2$$

multiplizieren und die zweite mit

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2$$

und dann subtrahieren, und so des Weiteren.

Wir erhalten dann im Ganzen n Gleichungen vom Grade $(n-1)$ und damit diese alle zusammen bestehen können, muss die Determinante der sämmtlichen Koeffizienten gleich Null sein. Setzen wir im Allgemeinen:

$$(a_i b_j - a_j b_i) = (ij)$$

so gewinnen wir die Determinante:

$$\begin{vmatrix} (10) & (20) & \cdots & (n0) \\ (20) & (30)+(21) & \cdots & (n1) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (n0) & (n1) & \cdots & (n, n-1) \end{vmatrix} = 0$$

Wir haben hierin eine symmetrische Determinante n-ter Ordnung, deren Entwicklung in Bezug auf die Koeffizienten einer jeden der beiden Gleichungen vom Grade n ist.

Sind unsere beiden Gleichungen nicht desselben Grades, so lassen sie sich auf denselben Grad bringen, indem man die von niedrigerem Grade mit einer passenden Potenz von x multipliziert. Man wird auf solche Weise alle die n Gleichungen herstellen können, die man in dem andern Fall erhält; daher wird sich auch nach dieser Methode eine Determinante des nämlichen Grades bezüglich der Koeffizienten der beiden Gleichungen ergeben. Da wir wissen, dass die Resultante vom Grade n sein muss in den Koeffizienten der Gleichung m-ten Grades und vom Grade m in den Koeffizienten der Gleichung n-ten Grades, so muss demgemäss augenscheinlich in diesem Falle sich ein Faktor abscheiden vom Grade $(n-m)$ $(n > m)$ in den Koeffizienten der Gleichung niedrigeren Grades.

Wir können übrigens zu dem Ergebniss auch ohne fremden Faktor gelangen, wenn wir anstatt n Gleichungen nach der angegebenen Methode aufzustellen nur m davon nach einander bilden und für die übrigen $(n-m)$ Gleichungen die folgenden wählen:

$$x^{n-m-1}\varphi(x) = 0$$
$$x^{n-m-2}\varphi(x) = 0$$
$$\cdot \qquad \cdot$$
$$x^0 \quad \varphi(x) = 0$$

alles Gleichungen, deren Grad gleich oder kleiner ist als $n-1$.

Man wird dann nicht mehr eine symmetrische Determinante erhalten, sondern die m ersten Zeilen werden wie vorher gebildet sein, die andern $(n-m)$ aber im Gegentheil aus den Koeffizienten der Gleichung niederen Grades.

Für $n = 4$, $m = 2$ erhält man zum Beispiel die folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} (a_1 b_0 - a_0 b_1), & (a_2 b_0 - a_0 b_2) & , & -b_3 a_0 & , & -b_4 a_0 \\ (a_2 b_0 - a_0 b_2), & (a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_0 b_3), & (-a_1 b_3 - a_0 b_4), & -b_4 a_1 \\ a_0 & , & a_1 & , & a_2 & , & 0 \\ 0 & , & a_0 & , & a_1 & , & a_2 \end{vmatrix}$$

Nach der Methode von Bezout gelangt man also in jedem Fall stets zu Determinanten von der Ordnung n, während man mit dem Verfahren Eulers Determinanten der Ordnung $(n + m)$ bekommt. Diese zweierlei Determinanten sind von gleichem Grade mit Bezug auf die Koeffizienten der beiden Gleichungen und lassen sich eine in die andere überführen.

Wir wollen nicht auf die Einzelheiten dieser Umwandlung eingehen, worüber man nachlesen mag: Trudi, Teoria dei determinanti. Napoli 1862. S. 101, Baltzer, Det. 1881. S. 123 ff.

Wir gehen statt dessen dazu über, folgenden Lehrsatz von Darboux (a. a. O.) nachzuweisen:

Nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die beiden Gleichungen vom Grade m, n $(m \leqq n)$ p gemeinsame Wurzeln haben, ist es, dass die Matrix der Determinante von Bezout $(n - p)$ zum Rang hat.

Zum Beweis, dass diese Bedingung hinreicht, kann man durchaus denselben Weg gehen, der im Fall der Eulerschen Determinante eingeschlagen wurde.

Die Überlegung wird dieselbe sein wie dort, wir wollen uns mithin deren Wiederholung erlassen.

Was aber den Nachweis dafür anbetrifft, dass die angezeigte Bedingung wirklich nothwendig ist, so folge hier die Beweisführung von Darboux.

Wir setzen:

$$\begin{aligned} b_0 \varphi(x) - a_0 \psi(x) &= f_0(x) \\ (b_0 x + b_1) \varphi(x) - (a_0 x + a_1) \psi(x) &= f_1(x) \\ \cdot \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad & \cdot \\ (b_0 x^{m-1} + \cdots) \varphi(x) - (a_0 x^{m-1} + \cdots) \psi(x) &= f_{m-1}(x) \end{aligned}$$

Die Determinante von Bezout wird durch die Koeffizienten der folgenden Gleichungen gebildet, deren Grad gleich oder geringer ist, als $(n - 1)$:

$$(1)\quad \begin{cases} f_0(x) = 0 \\ f_1(x) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \\ f_{m-1}(x) = 0 \\ x^{n-m-1}\varphi(x) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \\ x^0\varphi(x) = 0 \end{cases}$$

Setzen wir nun voraus, dass φ und ψ einen gemeinsamen Faktor vom Grade p besitzen und sei dies $F(x)$, so werden offenbar alle auf der linken Seite dieser Gleichungen stehenden Ausdrücke $F(x)$ zum Faktor haben und es wird darum geschrieben werden können:

$$(2)\quad \begin{cases} f_0(x) = F_0(x)\,F(x) \\ f_1(x) = F_1(x)\,F(x) \\ \cdot \quad \cdot \\ f_{m-1}(x) = F_{m-1}(x)\,F(x) \\ x^{n-m-1}\varphi(x) = x^{n-m-1}\varphi_1(x)\,F(x) \\ \cdot \quad \cdot \\ x^0\varphi(x) = x^0\,\varphi_1(x)\,F(x) \end{cases}$$

Es mag überdies noch

$$\psi(x) = \psi_1(x)\,F(x)$$

sein, φ_1 und ψ_1 keinen weiteren gemeinsamen Faktor enthalten.

Setzen wir dann:

$$x^0F(x) = z_0$$
$$x^1F(x) = z_1$$
$$\cdot \quad \cdot$$
$$x^{n-p-1}F(x) = z_{n-p-1}$$

so wird offenbar, dass alle die n Polynome (1) sich linear und homogen vermittelst der $z_0\, z_1 \ldots z_{n-p-1}$ ausdrücken lassen, die aber ihrerseits lineare Ausdrücke in den

$$x^0\ x^1\ x^2 \cdots x^{n-1}$$

sind.

Somit dürfen wir behaupten, dass in Absicht des Zusammenbestehens der Gleichungen (1) die z identisch verschwinden müssen.

Setzen wir:

$$\varphi_1 = \alpha_0 x^{m-p} + \alpha_1 x^{m-p-1} + \cdots + \alpha_{m-p}$$
$$\psi_1 = \beta_0 x^{n-p} + \beta_1 x^{n-p-1} + \cdots + \beta_{n-p}$$
$$F = \gamma_0 x^p + \gamma_1 x^{p-1} + \cdots + \gamma_p$$

so finden wir:

$$F_0 = \gamma_0[\beta_0\varphi_1(x) - \alpha_0\psi_1(x)]$$

$$F_1 = \gamma_0[(\beta_0 x + \beta_1)\varphi_1(x) - (\alpha_0 x - \alpha_1)\psi_1(x)] + \gamma_1[\beta_0\varphi_1(x) - \alpha_0\psi_1(x)]$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Also ist das System der Gleichungen

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 0, \quad \cdots \quad F_{m-p-1} = 0$$

auf das folgende Gleichungensystem zurückführbar:

$$F_0' = \beta_0\varphi_1(x) - \alpha_0\psi_1(x) = 0$$

$$F_1' = (\beta_0 x + \beta_1)\varphi_1(x) - (\alpha_0 x + \alpha_1)\psi_1(x) = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$F_{m-p-1}' = (\beta_0 x^{m-p-1} + \cdots)\,\varphi_1(x) - (\alpha_0 x^{m-p-1} + \cdots)\,\psi_1(x) = 0$$

Will man nach dem Verfahren von Bezout die Resultante der Gleichungen vom Grade $(m - p)$ und $(n - p)$, $\varphi_1 = 0$ und $\psi_1 = 0$ aufsuchen, so hat man die Determinante der Koeffizienten gerade von diesen $(n - p)$ Gleichungen:

$$F_0' = 0 \qquad F_1' = 0 \qquad \cdots \qquad F_{m-p-1}' = 0$$

$$x^{n-m-1}\varphi_1(x) = 0 \qquad \cdots \qquad x^0\varphi_1(x) = 0$$

zu bilden.

Diese Determinante ist daher von Null verschieden, weil φ_1 und ψ_1 der Annahme nach keinen gemeinsamen Faktor besitzen; indessen stimmt, nach den soeben geschehenen Bemerkungen, die Determinante überein mit der zu den folgenden Gleichungen gehörigen:

$$F_0 = 0 \qquad \cdots \qquad F_{m-p-1} = 0$$

$$x^{n-m-1}\varphi_1(x) = 0 \qquad \cdots \qquad x^0\varphi_1(x) = 0$$

Multiplizieren wir in diesen Gleichungen jede Potenz von x mit $F(x)$, so erhalten wir ebensoviele lineare Gleichungen in $z_0\, z_1 \ldots$ und deren Koeffizienten sind augenscheinlich dieselben, wie sie diesen nämlichen Gleichungen als linearen Gleichungen bezüglich der verschiedenen Potenzen von x zukommen. Wir erfahren also, dass $(n - p)$ lineare Gleichungen in den $(n - p)$ Grössen z eine von Null verschiedene Determinante besitzen, dass mithin keine weiteren Werthe für die z vorhanden sind, die gleichzeitig jenen Gleichungen Genüge leisten könnten, als nur die Werthe Null.

Die n Gleichungen (1) sind daher sämmtlich lineare Verbindungen der übrigen Gleichungen, die zwischen denselben Veränderlichen bestehen, und deren Anzahl $(n - p)$ beträgt, nämlich:

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 0, \quad \cdots, \quad z_{n-p-1} = 0.$$

Mithin sind von jenen n Gleichungen wenigstens p eine Folge der übrigen und nach einem Lehrsatze über lineare Gleichungen ersieht man, dass die Rangzahl der Determinante der Koeffizienten aus dem Gleichungensystem (1) nicht grösser sein kann als $(n - p)$; sie kann jedoch auch nicht kleiner sein, widrigenfalls man bei Wiederholung des ersten Theiles des Nachweises (soweit er sich nämlich auf die Erkenntniss des hinreichenden Charakters der Bedingungen bezieht) den Schluss zu machen haben würde, dass die vorgelegten beiden Gleichungen mehr als p gemeinsame Wurzeln hätten und dies zwar im Widerstreit gegen die Annahme.

Wenn man, wie oben gesagt (Siehe S. 212), Garbieri zufolge eine ähnliche Untersuchung anstellt, wobei man jedoch die Eulersche Determinante in Betracht zieht, so findet man Bedingungen, die den hier erörterten entsprechen, die sich zwar nicht auf eine quadratische Matrix beziehen lassen, aber wohl auf eine gewisse rechteckige Matrix, die in der Eulerschen Determinante enthalten ist.

Das ist nämlich eine rechteckige Matrix, die man aus der Eulerschen Determinante herleitet, wenn man die ersten $(n - p + 1)$ Zeilen der a und die ersten $(m - p + 1)$ Zeilen der b herausnimmt und die letzten $(p - 1)$ Spalten unterdrückt, die dann nur mit Elementen Null besetzt erscheinen.

Bedingung dafür, dass hier p gemeinsame Wurzeln vorhanden sind, ist, dass diese Matrix (nach der Bezeichnung Garbieris) einfach Null wird, das heisst, dass sie zum Rang $(m + n - 2p + 1)$ habe oder dass alle in ihr vorkommenden Determinanten höchster Ordnung (deren Ordnungszahl gerade $(m + n - 2p + 2)$ beträgt) verschwinden und nicht alle von niedrigerer Ordnung Null werden.

Die Bedingungen für das Vorhandensein von p gemeinsamen Wurzeln sind rein aus dem Gesichtspunkte der Determinantenlehre, abgesehen also von jeder Beziehung zu Invarianten, behandelt durch Lüroth und Noether. (Siehe Literaturverzeichniss auf S. 207.)

Andere Methoden zur Untersuchung der Resultanten sind gegeben von Rosenhain (a. a. O. Journ. f. Math. Bd. 30), Cayley (a. a. O. Journ. f. Math. Bd. 53) und von Borchardt (a. a. O. Journ. f. Math. Bd. 57).

Das Cayleysche Verfahren besteht in einer gewissen Abwandlung des Bezoutschen. Sind $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ die beiden in Rede stehenden Gleichungen und vom gleichen Grade, so betrachten wir den in x und y symmetrischen Ausdruck

$$F(x,y) = \frac{\varphi(x)\,\psi(y) - \varphi(y)\,\psi(x)}{x-y}$$

Führen wir die hier angezeigte Division aus, so lässt sich F schreiben

$$F(x,y) = \sum_{i,k=0}^{n-1} c_{ik} x^i y^k, \qquad (c_{ik} = c_{ki})$$

Haben nun $\varphi = 0$, $\psi = 0$ eine gemeinschaftliche Wurzel, so müssen für den Werth von x, der dieser Wurzel entspricht, die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von y in diesem Ausdrucke verschwinden, man erhält dann also die Gleichungen:

$$\sum_i c_{i0} \quad x^i = 0$$

$$\sum_i c_{i1} \quad x^i = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\sum_i c_{i,n-1} x^i = 0$$

Daraus folgt das Verschwinden der Determinante

$$R = \sum \pm c_{00}\, c_{11}\, c_{22} \ldots c_{n-1,\,n-1}$$

und diese Determinante ist die Resultante. Der vorliegende Ausdruck für die Resultante ist von besonderer Bedeutung, weil ihre Behandlung innerhalb der Invariantentheorie der binären Formen, wie Gordan gezeigt hat, hier ihren Ausgang nimmt.

Gordan, Über die Bildung der Resultante zweier Gleichungen. M. A. Bd. 3 (1871) [355—414].

Schreibt man F in seiner sogenannten symbolischen Form (Siehe Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen. Leipzig 1872; Gordan, Vorlesungen über Invariantentheorie, Bd. 2. Binäre Formen. Leipzig 1887 oder in zusammenfassender Darstellung Pascal, Repertorium der höheren Mathematik I. Leipzig 1900. Kap. 12.)

$$F = r_x^{n-1}\, s_y^{n-1} = r_{1x}^{n-1}\, s_{1y}^{n-1} = \cdots$$

so zeigt Gordan, dass die Resultante R symbolisch durch

$$R = \prod_{i,k} (r_i r_k)\,(s_i s_k) \qquad (i,k = 0, 1, \ldots n-1)$$

ausgedrückt wird.

Aus dem Gesichtspunkte der Formenlehre betrachtet, beruht die grosse Bedeutung der Resultante auf dem Umstande, dass sie ein aus den Koeffizienten der beiden Gleichungen gebildeter Ausdruck ist, der die sogenannte Invarianteneigenschaft besitzt oder dass sie eine Invariante ist. (Siehe die vorher angeführten Schriften.)

Wir dürfen uns hierauf nicht weiter einlassen, weil es uns von der Determinantenlehre, unserem Hauptgegenstande weitab führen würde und wollen nur noch einige Bemerkungen und Hinweise hinzufügen.

Es lässt sich nachweisen (und dies hat Gordan gethan), dass die invarianten Bedingungen für das Vorhandensein von zwei (nicht einer) zweien Gleichungen gemeinsamen Wurzeln nicht durch das Verschwinden zweier Invarianten ausgedrückt werden können, sondern durch das Verschwinden aller Koeffizienten einer gewissen Kovariante, die von Gordan Θ genannt worden ist.

Im Gegensatz hierzu lassen sich die invarianten Bedingungen für das Auftreten von drei gemeinschaftlichen Wurzeln zweier Gleichungen darstellen, indem man zu der Bedingung, die das identische Verschwinden von Θ ausspricht, die Bedingung des Verschwindens einer weiteren Invariante hinzufügt. Hierfür ist der Nachweis durch Pascal geführt.

Pascal, Sopra certi covarianti simultanei dei sistemi di due quartiche e di due quintiche. Ann. di mat. 2 ser. vol. 16 (1888) [85—99].

An diesem Satze ist bemerkenswerth, dass die neue Beziehung zwischen den Koeffizienten, die in Verbindung mit $\Theta = 0$ die Bedingung liefert, unter welcher die beiden Gleichungen drei gleiche Wurzeln haben, sich in die Form einer Invariante bringen lässt. Diese Form erhält man beispielsweise nicht, wenn man von der Bedingung für die Gleichheit einer Wurzel ($R = 0$) zu der für die Gleichheit zweier Wurzeln übergeht.

Zum Schluss weisen wir auf einige Berechnungen hin, die seither (aus dem Gesichtspunkte der Invariantenlehre) für die Resultante zweier Gleichungen von bestimmtem Grade angestellt worden sind.

Für eine Gleichung beliebigen Grades und eine quadratische: Clebsch, Journ. f. Math. Bd. 58 (1861) [273—291] und Theorie der binären algebraischen Formen. Leipzig 1872. S. 84 ff.

Für eine Gleichung beliebigen Grades und eine kubische: Pascal, Giorn. di Batt. vol. 25 (1887) [257—280].

Für zwei Gleichungen, deren Grad niedriger als 4: Clebsch, a. a. O.

Für eine biquadratische Gleichung und eine kubische: Brioschi, Collectanea mathem. in memoriam Chelini. Mailand 1881 [213—219].

Für zwei Gleichungen 4-ten Grades: D'Ovidio, Acc. di Tor. vol. 15. 1879—80 [385—389]. (Siehe auch Brioschi, Acc. di Tor. vol. 31. 1895—96 [441—446].)

Für eine Gleichung vom 5-ten Grade und eine quadratische oder kubische: D'Ovidio, Mem. d. soc. ital. d. scienze (detta dei XL) vol. 4. (1882) Nr. 2 [1—19].

Für eine Gleichung 5-ten Grades und eine zweite vom 4-ten oder 5-ten Grade: D'Ovidio, Roma Acc. Linc. mem. ser. 4 vol. 4 (1888) [607—622].

Weiterhin lese man bezüglich der Berechnung der invarianten Bedingungen für das Auftreten zweier oder dreier gemeinschaftlicher Wurzeln bei zwei Gleichungen 4-ten oder 5-ten Grades Gordan, a. a. O. Math. Ann. Bd. 3 und Pascal, a. a. O. Ann. di mat. vol. 16, sowie Acc. Nap. Rend. ser. 2. vol. 2 (1888) [402—409].

Eine Untersuchung, die in enger Beziehung steht zu derjenigen über die Resultante, hat zum Gegenstande die Diskriminante einer Gleichung.

Diskriminante einer Gleichung heisst diejenige rationale ganze Funktion der Koeffizienten, welche der Null gleich gesetzt die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür darstellt, dass die Gleichung zwei gleiche Wurzeln besitzt.

Aus der Algebra ist bekannt, dass, wenn eine Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat, diese Wurzel auch Wurzel der ersten Ableitung der linken Seite der Gleichung ist, und umgekehrt, wenn die Gleichung eine Wurzel gemeinsam hat mit ihrer ersten Ableitung, dass sie dann eine doppelte Wurzel besitzen wird. Es folgt daraus, dass die Untersuchung der Diskriminante sich zurückführen lässt auf die Untersuchung der Resultante der vorgelegten Gleichung und ihrer ersten Ableitung, diese gleich Null gesetzt.

Der Name Diskriminante rührt von Sylvester her.

Sylvester, On a remarkable discovery in the theory of canonical forms and of hyperdeterminants. Phil. Mag. ser. 4. vol. 2. (1851) S. 406.

Man wird die Diskriminante leicht mit Hilfe der Wurzeln darzustellen vermögen, weil ja offenbar, wenn man das Produkt aller Quadrate der Wurzeldifferenzen zu je zweien bildet, sich ein Ausdruck ergiebt, der in den Wurzeln symmetrisch, sich in Folge dessen vermittelst der Koeffizienten der Gleichung darstellen lässt, der andrerseits, wenn er gleich Null ist, die Gleichheit zweier Wurzeln anzeigt und der, im Fall, dass zwei Wurzeln gleich sind, sicher verschwindet.

Nun ist bekanntlich

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

gleich dem Produkte der Differenzen der Grössen α, zu zwei und zwei genommen, also dürfen wir schliessen, dass die Diskriminante das Quadrat dieser Determinante ist.

Stellen wir dies Quadrat durch zeilenweise Multiplikation her und lassen für die Summe der gleichen Potenzen der Wurzeln die Bezeichnung

$$s_p = \alpha_1^p + \alpha_2^p + \cdots + \alpha_n^p$$

in der Rechnung auftreten, so ergiebt sich, dass dasselbe seinen Ausdruck findet in der Determinante (von der Art der nach Hankel benannten, siehe § 19)

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-1} \end{vmatrix}$$

Die Diskriminante, wenn sie als die Resultante von f und seiner ersten Ableitung berechnet wird, ergiebt sich in der Determinante der Ordnung $(2n - 1)$:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ na_0, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2 & \dots \\ 0 & na_0 & (n-1)a_1 & \dots \\ 0 & 0 & n\,a_0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}$$

bei der die Zeilen von der ersten Art in der Anzahl $(n - 1)$ und die Zeilen zweiter Art in der Anzahl n vorhanden sind. Man hat es mit einem Ausdruck zu thun, der augenscheinlich durch a_0 theilbar ist, und, wird dieser Faktor unterdrückt, so bleibt jedes Glied vom Grade $(2n - 2)$ bezüglich der Koeffizienten der Gleichung.

Gleich der Resultante hat naturgemäss auch die Diskriminante die Veranlassung zu wichtigen Untersuchungen auf dem Gebiete der Lehre von den binären Formen gegeben. Für die Diskriminante besteht die wesentliche Eigenschaft, dass sie eine Invariante ist für die linke Seite der vorgelegten Gleichung.

Wie wir es bei der Resultante gethan, geben wir noch einige Hinweise auf Schriftsteller, die Diskriminanten von Gleichungen verschiedener Grade berechnet haben.

Für die ersten vier Gradzahlen verläuft die Untersuchung ohne Schwierigkeiten. Man vergleiche beispielsweise die oben (Siehe S. 219) angeführte Schrift von Clebsch.

Für den 5-ten Grad: Salmon, Camb. Dubl. math. Journ. vol. 5 (1850).

Für den 6-ten Grad: Brioschi, Journ. f. Math. Bd. 53 (1857) [372—376] und Ann. di mat. ser. 2 t. 1 (1867—68) S. 159. — Maisano, Math. Ann. Bd. 30 (1887) [442—452].

Für den 7-ten Grad: Gordan, Math. Ann. Bd. 31 (1888) [566—600] — Brioschi, Ann. di mat. ser. 2 vol. 26 (1897) [255—259].

Für den 8-ten Grad: Maisano, Rend. Circ. mat. Palermo t. 3 (1889) [53—59] und t. 4 (1890) [1—8].

Weitere Quellen für das vorliegende Forschungsgebiet finden sich in Pascals Repertorium der höheren Mathematik I Leipzig 1900. Kap. 12, § 5 oder ausführlicher in Encycl. d. math. Wiss. I B 1 a. Art. 20—22 und I B 2 Art. 25.

§ 58. Allgemeine Eigenschaften der Funktionaldeterminanten. Lehrsätze von Jacobi.

Mit den Funktionaldeterminanten hat sich zuerst Jacobi beschäftigt, und aus diesem Grunde sind sie auch von Sylvester als „Jacobians“ und danach als Jacobische Determinanten bezeichnet worden.

Jacobi, a. a. O. (Siehe Literaturbericht auf S. 164) Journ. f. Math. Bd. 12.

Jacobi, De determinantibus functionalibus. Journ. f. Math. Bd. 22 (1841) [319—359], wieder abgedruckt in Jacobi, Ges. Werke Bd. 3. Berlin 1884 [395—438]. (Deutsche Ausgabe mit Anmerkungen durch Stäckel in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften N. 78.)

Jacobi, Vorlesungen über Dynamik. Ges. Werke, Supplementband, Berlin 1884. S. 100 ff.

Weitere Arbeiten über die Funktionaldeterminanten sind die folgenden:

Sylvester, a. a. O. (Siehe Literaturbericht auf S. 206) Phil. Tr. 1853. vol. 143. part 1 [407—548] S. 476.

Donkin, On a class of differential equations, including those which occur in dynamical problems. Phil. Tr. 1854. vol. 144. part 1 [71—113].

Cayley, Note sur une formule pour la reversion des séries. Journ. f. Math. Bd. 52 (1856) [276—284], wieder abgedruckt in Cayley, Coll. math. pap. vol. 4. Cambridge 1891 [30—37].

Clebsch, Über eine Eigenschaft von Funktionaldeterminanten. Journ. f. Math. Bd. 69 (1868) [355—358].

Neumann, C., Zur Theorie der Funktionaldeterminanten. M. A. Bd. 1 (1869) S. 208 f.

Kronecker, Bemerkungen zur Determinanten-Theorie. Journ. f. Math. Bd. 72 (1870) S. 153 ff. (Bemerkungen zu § 12 von Baltzers Determ. Siehe Literaturbericht auf S. 107.)

Casorati, Sui determinanti di funzioni. Ist. Lomb. Mem. vol. 13 (ser. 3. vol. 4) (1877) — fasc. 2. 1875 [181—187].

Torelli, Sui determinanti di funzioni. Rend. Circ. mat. Palermo. tom. 7. 1893. parte prima [75—84].

Wir unterlassen es, zahlreiche andere Arbeiten anzuführen, die mit diesem Lehrgebiet in mehr oder weniger enger Berührung stehen und verweisen noch auf Scott, Det. 1880 chap. 10 [129—145], Baltzer, Det. 1881. § 12 [139—162], Gordan (Kerschensteiner), Vorlesungen über Invariantentheorie. 1. Bd. Leipzig 1885 [120—131] und auf Nettos Darstellung in Encycl. d. math. Wiss. I B 1 b. Rationale Funktionen mehrerer Veränderlichen. Art. 21.

Es mögen gegeben sein n Funktionen $y_1\, y_2 \dots y_n$ von n Veränderlichen $x_1\, x_2 \dots x_n$. Man bilde die Determinante

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Diese heisst die Funktionaldeterminante oder Jacobische Determinante der y. Der grössere Theil der Lehrsätze, die wir für solche Determinanten vorfinden werden, lässt eine bemerkenswerthe Übereinstimmung hervortreten, die zwischen ihnen und den Ableitungen

der Funktionen einer einzigen Veränderlichen besteht. Deshalb bedient man sich auch für derartige Determinanten des Symboles:

$$\frac{\partial (y_1, y_2, \ldots y_n)}{\partial (x_1, x_2, \ldots x_n)}.$$

Aus der Gestalt von J geht augenscheinlich hervor, dass auch seine Minoren Funktionaldeterminanten sind, mit der einzigen Abweichung, dass einige der gegebenen Funktionen darin nicht mehr vorkommen und einige der Veränderlichen nicht mehr als solche angesehen werden.

Eine erste wichtige Eigenschaft der Jacobischen Determinanten ist die folgende:

Wenn wir uns die $y_1, y_2, \ldots, y_n$ als Funktionen der

$$z_1 \; z_2 \ldots z_n$$

vorstellen und diese ihrerseits als Funktionen der $x_1 \ldots x_n$, dann ist die Jacobische Determinante der y mit Bezug auf die x gleich dem Produkte der zwei Jacobischen Determinanten, einer der y rücksichtlich der z und einer der z rücksichtlich der x.

Diese Eigenschaft der Funktionaldeterminanten entspricht der ähnlichen, die an der Ableitung zusammengesetzter Funktionen kenntlich wird.

Wir wollen mit einander multiplizieren die beiden Determinanten:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial z_1} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial z_n} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial z_1} & \ldots & \frac{\partial y_n}{\partial z_n} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \frac{\partial z_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial z_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

und zwar wollen wir dies Produkt in der Weise herstellen, dass wir die Zeilen der ersten Determinante mit den Spalten der zweiten verbinden. Es wird dann das Element der Produktdeterminante, dem die Ordnungszahlen i, j zukommen, ausgedrückt durch

$$\frac{\partial y_i}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial y_i}{\partial z_n}\frac{\partial z_n}{\partial x_j}$$

und dies ist gleich

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j}.$$

Hierdurch erscheint der Lehrsatz erwiesen.

Es mögen die $y_1, \ldots, y_n$ als Funktionen der $x_1 \ldots x_n$ bestimmt sein und diese wiederum sich als (inverse) Funktionen der y betrachten lassen. Dann haben die Jacobische Determinante der y mit Bezug auf die x und die Jacobische Determinante der x mit Bezug auf die y reziproke Werthe.

Betrachten wir nämlich die y als Funktionen der x und die x als Funktionen der y und beachten mithin, dass die Determinante der y bezüglich der y gleich 1 ist, weil ja

$$\frac{\partial y_i}{\partial y_i} = 1 \qquad \frac{\partial y_i}{\partial y_j} = 0$$

so ergiebt sich bei Anwendung des vorausgehenden Lehrsatzes

$$\frac{\partial (y_1 \ldots y_n)}{\partial (x_1 \ldots x_n)} \cdot \frac{\partial (x_1 \ldots x_n)}{\partial (y_1 \ldots y_n)} = 1$$

und hiermit die vorangestellte Behauptung.

Dieser Lehrsatz entspricht augenscheinlich demjenigen über die Ableitung der inversen Funktionen.

Wir kommen nun zu einem weiteren Lehrsatze, der mit dem über die Ableitung implicite gegebener Funktionen verglichen werden mag.

Es mögen die Funktionen y von x implicite gegeben sein durch die n Gleichungen

$$F_1 (y_1 \ldots y_n, \; x_1 \ldots x_n) = 0$$
$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$
$$F_n (y_1 \ldots y_n, \; x_1 \ldots x_n) = 0$$

Die Jacobische Determinante der y mit Bezug auf die x ist dem absoluten Werthe nach gleich dem Quotienten der beiden Jacobischen Determinanten, einer, die den F rücksichtlich der x und einer, die den F rücksichtlich der y zugehört, im Besonderen

$$\frac{\partial (y_1 \ldots y_n)}{\partial (x_1 \ldots x_n)} = (-1)^n \frac{\dfrac{\partial (F_1 \ldots F_n)}{\partial (x_1 \ldots x_n)}}{\dfrac{\partial (F_1 \ldots F_n)}{\partial (y_1 \ldots y_n)}}$$

Und wirklich, nehmen wir an, dass innerhalb der F an Stelle der y ihre Ausdrücke in den x gesetzt werden, so werden jene Gleichungen identisch Null.

Man erhält also die Beziehungen:

$$-\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \frac{\partial F_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_j}$$

Diese zeigen aber, dass das Produkt

$$\frac{\partial(y_1 \ldots y_n)}{\partial(x_1 \ldots x_n)} \cdot \frac{\partial(F_1 \ldots F_n)}{\partial(y_1 \ldots y_n)}$$

genau gleich kommt

$$(-1)^n \frac{\partial(F_1 \ldots F_n)}{\partial(x_1 \ldots x_n)}$$

Ein Lehrsatz, der den Funktionaldeterminanten eine besonders hohe Wichtigkeit verleiht, ist der folgende:

Als nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwischen n Funktionen von n Veränderlichen eine Beziehung besteht, ist es anzusehen, wenn ihre Jacobische Determinante identisch verschwindet.

Sind gegeben

$$y_1 = \varphi_1(x_1 \ldots x_n)$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$y_n = \varphi_n(x_1 \ldots x_n)$$

und verschwindet, wenn man $(n-1)$ Veränderliche x eliminiert, auch die letzte noch, so erhält man eine Beziehungsgleichung zwischen den y

$$F(y_1 \ldots y_n) = 0$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich:

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_i} = 0$$

giltig für einen beliebigen Index i. Hiernach sieht man, dass zwischen den Elementen ein und derselben Spalte innerhalb der Funktionaldeterminante stets dieselbe lineare homogene Gleichung besteht, mithin diese Determinante identisch verschwindet.

Setzen wir nun umgekehrt voraus, es sei die Determinante gleich Null.

Wir wollen dann aus den Gleichungen für die y die $(n-1)$ Veränderlichen $x_2 \ldots x_n$ eliminieren. So erscheint eine Gleichung:

$$y_1 = \psi(x_1\, y_2 \ldots y_n)$$

in der, wie wir werden zeigen können, die Veränderliche x_1 nicht vorkommt. Mit andern Worten, es wird die Ableitung von ψ mit

Bezug auf x_1 verschwinden und damit wird dann der Lehrsatz erwiesen sein.

Betrachten wir nämlich

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

als Funktionen von $x_1 x_2 \ldots x_n$ und lassen diese dann wiederum als Funktionen der $x_1 y_2 \ldots y_n$ gelten. Augenscheinlich ist ja x_1 eine Funktion von sich selbst, und was $x_2 x_3 \ldots x_n$ anlangt, so können diese als Funktionen von $x_1 y_2 \ldots y_n$ betrachtet werden, indem man die letzten $(n - 1)$ Gleichungen $y_2 = \varphi_2, \ldots, y_n = \varphi_n$ nach $x_2 \ldots x_n$ auflöst.

Wendet man dann den ersten der oben bewiesenen Lehrsätze an, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial(y_1 \ldots y_n)}{\partial(x_1 y_2 \ldots y_n)} = \frac{\partial(y_1 \ldots y_n)}{\partial(x_1 \ldots x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1 \ldots x_n)}{\partial(x_1 y_2 \ldots y_n)}.$$

Der erste Faktor auf der rechten Seite ist der Annahme zufolge Null, also wird auch der Ausdruck auf der linken Seite Null sein oder

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = 0$$

Nun sind bei der Bildung dieser Determinante die $y_1 y_2 \ldots y_n$ als Funktionen von

$$x_1 \; y_2 \ldots y_n$$

gedacht. y_1 als Funktion dieser Veränderlichen ist nichts anderes als die oben aufgefundene Funktion ψ und die andern sind durch die identischen Gleichungen $y_2 = y_2, \ldots, y_n = y_n$ gegeben.

Daher werden alle Elemente dieser Determinante unterhalb der Hauptdiagonale Null und die Elemente der Hauptdiagonale beziehungsweise

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \; 1, \; 1, \; \ldots \; 1.$$

Die Entwicklung unserer Determinante ergiebt hiernach einfach $\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$.
Hierdurch ist unsere Behauptung bewiesen.

Wir können von diesem Lehrsatze eine Anwendung machen bei

der Untersuchung darüber, wann eine Funktion von x_1, x_2 diese Veränderlichen stets in der Verbindung

$$\varphi = k_1 x_1 + k_2 x_2$$

enthält, dergestalt, dass man sie ohne Weiteres als Funktion dieses Binoms ansehen kann. Es muss, wie wir jetzt erfahren haben, damit die Funktion f eine Funktion von φ sei, die Jacobische Determinante der gegebenen Funktion und von φ Null sein. Also erhält man:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} = 0$$

Oder mit andern Worten, es muss die Funktion von der Beschaffenheit sein, dass

$$k_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} = k_1 \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

Ist $k_1 = 1$, $k_2 = i = \sqrt{-1}$, dann ergiebt sich die Bedingung

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = i \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

Und dies ist die Bedingung dafür, dass f Funktion der komplexen Veränderlichen $x_1 + i x_2$ sei.

§ 59. Lehrsätze, die sich auf den Fall beziehen, wo die Funktionen sich in Faktoren spalten.

Wir nehmen an, dass die gegebenen Funktionen y_i sämmtlich zurückführbar sind auf die Form

$$y_i = \frac{u_i}{u_0} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Da dann die Gleichung besteht

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \frac{u_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial u_0}{\partial x_j}}{u_0^2}$$

so lässt sich die Funktionaldeterminante der y schreiben:

$$\frac{1}{u_0^{2n+1}} \begin{vmatrix} u_0, & u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x_1} - u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x_1}, & \ldots & u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x_n} - u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x_n} \\ u_1, & u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x_1}, & \ldots & u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_n} - u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdots \cdot & \cdot \\ u_n, & u_0 \frac{\partial u_n}{\partial x_1} - u_n \frac{\partial u_0}{\partial x_1}, & \ldots & u_0 \frac{\partial u_n}{\partial x_n} - u_n \frac{\partial u_0}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

wenn wir eine erste Zeile mit den Elementen

$$u_0 \quad 0 \quad 0 \cdots 0$$

und eine erste Spalte mit den Elementen

$$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \ldots u_n$$

hinzufügen und durch u_0 dividieren.

Zerlegen wir diese Determinante mit binomischen Elementen in andere mit eingliedrigen und beachten, dass auf solche Weise alle die entstehenden Determinanten bis auf eine Null werden und dass diese einzige von Null verschiedene Determinante den Faktor u_0^n bei sich hat, so ergiebt sich schliesslich die Funktionaldeterminante der y in der Gestalt:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{1}{u_0^{n+1}} \begin{vmatrix} u_0, & \frac{\partial u_0}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_0}{\partial x_n} \\ u_1, & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ u_n, & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Hiermit erscheinen diese neuen Determinanten eingeführt; sie sind auf eine von den Jacobischen abweichende Art gebildet, insofern sie nämlich eine Spalte enthalten, deren Elemente $(n+1)$ gegebene Funktionen sind. Die letztere Formel (1) stammt von Jacobi.

Jacobi a. a. O. Siehe S. 164. Journ. f. Math. Bd. 12. (1834) S. 40.

Mit diesem Gegenstande sind noch einige Untersuchungen von Casorati (a. a. O. Ist. Lomb. 1875) und andere noch neuere von Torelli (a. a. O. Rend. Palermo 1893) verknüpft.

Man pflegt durch $K(u_0\, u_1 \ldots u_n)$ die Determinante zu bezeichnen, die auf der rechten Seite obiger Formel vorkommt; sie ist augenscheinlich eine lineare Verbindung von $(n+1)$ Jacobischen Determinanten. Jacobi und nach ihm Casorati haben der Formel (1) eine entsprechende für K an die Seite gestellt. Nehmen wir an, die $u_0\, u_1 \ldots u_n$ seien alle von der Gestalt:

$$u_i = \frac{v_i}{v} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots n)$$

Dann wird:

$$K(u_0 \ldots u_n) = \begin{vmatrix} u_0, & \frac{\partial u_0}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_0}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ u_n, & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{v^{2(n+1)}} \begin{vmatrix} v_0 v, & v\frac{\partial v_0}{\partial x_1} - v_0\frac{\partial v}{\partial x_1}, & \ldots & v\frac{\partial v_n}{\partial x_n} - v_0\frac{\partial v}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ v_n v, & v\frac{\partial v_n}{\partial x_1} - v_n\frac{\partial v}{\partial x_1}, & \ldots & v\frac{\partial v_n}{\partial x_n} - v_n\frac{\partial v}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

und zerlegt man, wie gewöhnlich, in Determinanten mit eingliedrigen Elementen, oder einfacher, fügt man zu den Elementen einer jeden Spalte die der ersten hinzu, nachdem man sie beziehungsweise mit

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x_1}, \quad \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x_2}, \ldots \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x_n}$$

multipliziert hat, so erhält man schliesslich:

(2) $$K(u_0\, u_1 \ldots u_n) = \frac{1}{v^{n+1}} K(v_0\, v_1 \ldots v_n)$$

Hieraus wird ersichtlich, dass im Unterschied zur Jacobischen Determinante die Determinante K einer in gewissem Sinne viel einfacheren Gleichung Genüge leistet, insofern als abgesehen von dem Faktor $(1 : v^{n+1})$ die beiden Seiten dieser Gleichung auf dieselbe Weise gebildet sind, die eine nämlich aus den u, die andere aus den v.

Natürlich wird man aus (1), (2) Formeln herleiten können für den Fall, wo u_0, v nicht Divisoren der y, u sind, sondern Faktoren. Es würde zu dem Ende genügen, u_0 in $(1 : u_0)$ und v in $(1 : v)$ zu verwandeln.

Die Determinante K besitzt Eigenschaften, welche ähnlich sind denen der Jacobischen Determinante. So gilt zum Beispiel der Lehrsatz (Casorati):

Wenn K identisch verschwindet, so ist die Gleichung, die die $(n+1)$ Funktionen $u_0, u_1, \ldots, u_n$ der n Veränderlichen $x_1\, x_2 \ldots x_n$ unter einander verbindet, eine homogene Gleichung und umgekehrt.

Von Bedeutung ist hier die Bemerkung, dass diese Eigenthümlichkeit des K stillschweigend schon in einer Arbeit von Clebsch (a. a. O.

Journ. f. Math. Bd. 69) benutzt ist. Man lese dieserhalb weiterhin den § 61 nach.

Zum Beweise des Satzes setzen wir einmal zunächst voraus, dass die Beziehung unter den u homogen ist und es sei $\Phi(u_0 u_1 \dots u_n) = 0$ vom Grade ϱ. Dann haben wir doch:

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{c} \frac{\partial\Phi}{\partial u_0}\frac{\partial u_0}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial\Phi}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1} = 0 \\ \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial\Phi}{\partial u_0}\frac{\partial u_0}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial\Phi}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0 \end{array}\right.$$

und in Folge der Eulerschen Gleichung weiter noch:

$$(4)\quad \frac{\partial\Phi}{\partial u_0}u_0 + \cdots + \frac{\partial\Phi}{\partial u_n}u_n = \varrho\Phi = 0$$

Die Determinante dieser Gleichungen ist mithin Null und eben diese Determinante ist es, die mit K benannt worden ist.

Nehmen wir umgekehrt an, die Determinante K verschwinde. Alsdann ergiebt sich, dass, wenn nicht alle Minoren n-ter Ordnung in K Null sind, die linke Seite der Gleichung (4) Null sein muss. Wir erhalten also eine Beziehungsgleichung zwischen den u, und diese kann nur, wenn wir von einem Faktor absehen, die angenommene Gleichung $\Phi = 0$ sein, die als eine irreduzibele Gleichung zwischen den u vorausgesetzt worden. Demgemäss wird der Ausdruck linker Hand in (4) Φ als Faktor enthalten und nach Berechnung der Gradzahlen folgt weiter, dass das Verhältniss nur eine Konstante sein kann. Hieraus erhellt, dass Φ einer Gleichung Genüge leistet, wie sie beim Eulerschen Satze vorkommt, und mithin homogen ist.

Ohne Schwierigkeit würde man den Nachweis dahin vervollständigen, dass auch der Fall einbegriffen würde, wo alle Minoren n-ter Ordnung in K Null sind, und dies würde sich entsprechend fortsetzen lassen.

Diese Betrachtungen haben letzthin eine breite Ausdehnung gewonnen in einer Arbeit von Torelli (a. a. O.). Wir wollen ohne Weiteres einige der wichtigeren Lehrsätze anführen, die von diesem Verfasser gefunden worden sind.

Wir setzen von den gegebenen Funktionen $y_1 \dots y_n$, anstatt sie sämmtlich mit demselben gemeinsamen Faktor versehen zu denken (in dem von Jacobi besprochenen Fall war $(1 : u_0)$ dieser Faktor), lieber voraus, dass eine jede in zwei Faktoren, wie folgt, zerfällt:

$$y_1 = \omega_1 u_1$$
$$y_2 = \omega_2 u_2$$
$$\cdot \quad \cdot$$
$$y_n = \omega_n u_n$$

Dann ergiebt sich, dass die Jacobische Determinante der y sich in der Determinante darstellt:

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & \cdots & 0 & -u_1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & \omega_n & 0 & \cdots & -u_n \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \omega_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \omega_n}{\partial x_n} & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Würde man die ω alle unter einander gleich annehmen, so würde man hieraus wiederum die Jacobische Formel gewinnen. (Siehe S. 228.)

Ähnlich würden sich für den Fall, wo ein jedes der y in drei Faktoren zerfällt und so fort, andere Formeln auffinden lassen.

Um einen besonderen Fall noch anzuführen, suchen wir die betreffende Formel, wenn

$$y_1 = \alpha^{\varrho_1} u_1$$
$$\cdot \quad \cdot$$
$$y_n = \alpha^{\varrho_n} u_n$$

Es genügt, nur zu setzen $\omega_1 = \alpha^{\varrho_1}, \cdots, \omega_n = \alpha^{\varrho_n}$ und die Umwandlung der Determinante in passender Weise durchzuführen.

Man findet als Ergebniss:

$$\begin{vmatrix} \alpha & -\varrho_1 u_1 & \cdots & -\varrho_n u_n \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x_n} & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \alpha^{\varrho_1 + \cdots + \varrho_n - 1}$$

Man kann ähnliche Formeln für die Determinante K entwickeln.

Setzen wir:

$$u_0 = \alpha_0 v_0$$
$$\cdot \quad \cdot$$
$$u_n = \alpha_n v_n$$

Die Determinante K geht dann über in die folgende:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \cdots & 0 & -v_0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & \alpha_n & 0 & \cdots & -v_n \\ 0 & \cdots & 0 & v_0 & \cdots & v_n \\ \frac{\partial \alpha_0}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_1} & \frac{\partial v_0}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_n}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial \alpha_0}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_n} & \frac{\partial v_0}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

und dies giebt Veranlassung zu einer noch allgemeineren Formel, als die von Casorati ist, die wir oben angeführt haben.

Setzen wir

$$\alpha_0 = \alpha^{\varrho_0}, \cdots, \alpha_n = \alpha^{\varrho_n}$$

so ergiebt sich nach der Umwandlung auf der rechten Seite:

$$\begin{vmatrix} \alpha & -\varrho_0 v_0 & \cdots & -\varrho_n v_n \\ 0 & v_0 & \cdots & v_n \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} & \frac{\partial v_0}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_n}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x_n} & \frac{\partial v_0}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \alpha^{\varrho_0 + \cdots + \varrho_n - 1}$$

§ 60. Umwandlung eines vielfachen Integrales.

Eine weitere Übereinstimmung zwischen den Ableitungen der Funktionen einer Veränderlichen und den Funktionaldeterminanten kommt zu Tage bei der Umwandlung von Integralen.

Um ein einfaches Integral mit Bezug auf die Veränderliche y in ein anderes umzuwandeln, bei dem x die Rolle der Veränderlichen spielt, hat man bekanntlich die Funktion unter dem Integralzeichen mit der Ableitung der früheren Veränderlichen in Rücksicht auf die neue zu multiplizieren.

Eine ähnliche Anweisung besteht nun für vielfache Integrale, nämlich: Hat man ein vielfaches Integral mit Bezug auf die Veränderlichen $y_1 y_2 \ldots y_n$ in ein anderes umzuwandeln mit den neuen Veränderlichen $x_1 x_2 \ldots x_n$, die mit den y durch gegebene Gleichungen verbunden sind, so ist hierzu erforderlich, die Funktion unterhalb des Zeichens zu multiplizieren mit der Jacobischen Determinante der früheren Veränderlichen in Rücksicht auf die neuen.

Es sei gegeben das vielfache Integral

$$\int\int\int \cdots \int R(y_1 \ldots y_n)\, dy_1 \ldots dy_n$$

Man setze:

$$y_1 = \varphi_1(x_1 \ldots x_n)$$
$$\cdot \quad \cdot$$
$$y_n = \varphi_n(x_1 \ldots x_n)$$

In der zweiten dieser Gleichungen wollen wir an Stelle von x_1 den aus der ersten Gleichung zu entnehmenden Werth einführen; dann wird y_2 allein durch $y_1 x_2 \ldots x_n$ ausgedrückt erscheinen. Weiter wollen wir in der dritten Gleichung an Stelle von $x_1 x_2$ die Werthe einführen, welche aus den beiden ersten Gleichungen sich ergeben; es wird damit y_3 durch $y_1 y_2 x_3 \ldots x_n$ seinen Ausdruck finden. Indem wir so fortfahren, können wir also stets die vorgelegten Gleichungen in der folgenden Form uns dargestellt denken:

$$y_1 = f_1(x_1 x_2 \ldots x_n)$$
$$y_2 = f_2(y_1 x_2 \ldots x_n)$$
$$y_3 = f_3(y_1 y_2 x_3 \ldots x_n)$$
$$\cdot \quad \cdot$$
$$y_n = f_n(y_1 y_2 \ldots y_{n-1} x_n)$$

Es sei hierbei bemerkt, dass f_1 dieselbe Funktion ist, wie φ_1.

Wir beginnen nun damit, in dem vorgelegten vielfachen Integrale die Integration bezüglich y_n auszuführen. Dann können wir mittelst der letzten dieser Gleichungen die Veränderliche x_n einführen und haben, um in x_n umzuwandeln, nur die Funktion unter dem Integralzeichen mit

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

zu multiplizieren.

Weiter können wir in entsprechender Weise mit Hilfe der vorletzten der vorausgehenden Gleichungen die Veränderliche x_{n-1} ein-

führen, wobei einfach mit $(\partial f_{n-1} : \partial x_{n-1})$ zu multiplizieren sein wird, und so fahren wir dann fort.

Nach der Umwandlung wird das Integral bezüglich der x schliesslich:

$$\int\int\int\cdots\int R\,\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n$$

und hierbei ist nicht ausser Acht zu lassen, dass in R die geeigneten Substitutionen geschehen, die dasselbe zu einer Funktion der x machen.

Die Grösse, mit welcher man demnach die Funktion unter dem Integralzeichen zu multiplizieren hat, ist

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Die Funktionen f sind nicht unmittelbar diejenigen, die vorgelegt wurden. Wir werden aus diesem Grunde suchen, den letzten Ausdruck dergestalt umzuwandeln, dass die unmittelbar gegebenen Funktionen φ sichtbar werden. Wir wollen zeigen, dass das eben verzeichnete Produkt der Jacobischen Determinante der y gleich kommt, die man mit Rücksicht auf die x aus den gegebenen Funktionen φ ableitet.

Wir multiplizieren die Jacobische Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\partial f_2}{\partial y_1} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -\frac{\partial f_n}{\partial y_1}, & -\frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

deren Werth gleich 1 ist.

Führen wir die Produktbildung in der Art aus, dass wir die Spalten der ersteren Determinante mit den Zeilen der zweiten verbinden, so erhalten wir die Determinante, deren allgemeines Glied mit den Ordnungszahlen i, j sich ausdrückt durch:

$$(i,j) = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}\frac{\partial f_j}{\partial y_1} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i}\frac{\partial f_j}{\partial y_2} - \cdots - \frac{\partial\varphi_{j-1}}{\partial x_i}\frac{\partial f_j}{\partial y_{j-1}} + \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}$$

Wenn wir uns nun die Bildungsweise der Gleichungen f vergegenwärtigen, und wenn wir aus ihnen die Ableitung von y_j mit Bezug auf x_i herzuleiten unternehmen, also die, welche man aus den φ gewinnen würde, nämlich

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$$

so erhalten wir, von f_j ausgehend

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \frac{\partial f_j}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f_j}{\partial y_{j-1}}\frac{\partial y_{j-1}}{\partial x_i} =$$
$$= \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \frac{\partial f_j}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f_j}{\partial y_{j-1}}\frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial x_i}$$

Mithin wird ersichtlich, dass

$$(i\,j) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

Hier hat man auf der rechten Seite die Ableitung von f_j mit Bezug auf x_i nur insofern gebildet sich vorzustellen, als x_i explicite in f_j enthalten ist. Wenn daher $i < j$, dann ist diese Ableitung gleich Null. Man erhält hiernach die Produktdeterminante in der Gestalt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \frac{\partial f_3}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

und dies ist gleich

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

Hiermit ist unser Lehrsatz bewiesen.

Besondere Untersuchungen über das Verschwinden von Funktionaldeterminanten findet man bei

Hahn, Untersuchung der Kegelschnittnetze, deren Jacobische Form oder Hermitesche Form identisch verschwindet. M. A. Bd. 15 (1879) [111—121].

Pasch, Notiz über ternäre Formen mit verschwindender Funktionaldeterminante. M. A. Bd. 18 (1881) S. 93 f.

Pasch, Verschwindende Determinanten dritten Grades aus ternären linearen Formen. M. A. Bd. 44 (1894) [89—96].

§. 61. Systeme von Jacobischen Determinanten aus $(n+1)$ Funktionen von n Veränderlichen. Tangentenkoordinaten. Jacobische Determinanten von Jacobischen Determinanten. Lehrsatz von Clebsch.

Nehmen wir an, dass die homogenen Koordinaten $y_1\, y_2\, y_3$ eines Punktes einer ebenen Kurve proportional drei homogenen ganzen Funktionen der zwei Parameter x_1, x_2 vorgelegt sind in folgenden Gleichungen:

$$\varrho y_1 = \varphi_1(x_1 x_2)$$
$$\varrho y_2 = \varphi_2(x_1 x_2)$$
$$\varrho y_3 = \varphi_3(x_1 x_2)$$

weiter, dass man durch Elimination der beiden homogenen Veränderlichen x_1, x_2 erhält:

$$F(y_1 y_2 y_3) = 0$$

Hiermit ist die Gleichung der gegebenen Kurve in homogenen Koordinaten dargestellt. Wenn wir in ihr an Stelle der y deren Werthe φ einsetzen, so erhalten wir eine Funktion von x_1, x_2, die identisch verschwindet.

Daher können wir die Ableitungen von F mit Bezug auf x_1 und x_2 gleich Null setzen, also schreiben:

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial y_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial y_3}\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial y_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial y_3}\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} = 0$$

Aus diesen beiden Gleichungen leiten wir her, dass die Grössen

$$\frac{\partial F}{\partial y_1},\ \frac{\partial F}{\partial y_2},\ \frac{\partial F}{\partial y_3}$$

proportional sind den Determinanten der Matrix

$$\left\|\begin{matrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} \end{matrix}\right\|$$

und dies sind Jacobische Determinanten der drei Funktionen φ, diese zu zwei und zwei genommen. Nun ist aus der analytischen Geometrie bekannt, dass die Koordinaten der Tangente an die Kurve den drei

Ableitungen von F gerade proportional sind, mithin dürfen wir schliessen, dass die Koordinaten der Tangente nun auch den drei Jacobischen Determinanten proportional sein werden, die aus je zwei von den drei Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ gebildet sind, was sich in den Gleichungen ausspricht:

$$\begin{aligned}\sigma u_1 &= J(\varphi_2 \varphi_3) = \psi_1(x_1 x_2)\\ \sigma u_2 &= J(\varphi_3 \varphi_1) = \psi_2(x_1 x_2)\\ \sigma u_3 &= J(\varphi_1 \varphi_2) = \psi_3(x_1 x_2)\end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit dem Symbol J die Jacobische Determinante.

Die u erscheinen hiermit durch x_1, x_2 ausgedrückt.

Nach dem Gesetz der Dualität hat man, um von den u auf die y überzugehen, auf die u dieselben Verfahrensweisen anzuwenden; es werden sich dann die y ihrerseits proportional den Jacobischen Determinanten aus den ψ ergeben.

Hier nimmt Clebsch seinen Ausgangspunkt, um folgenden noch allgemeineren Lehrsatz bezüglich der Jacobischen Determinanten festzustellen:

(Siehe den oben S. 222 angeführten Aufsatz von Clebsch, Journ. f. Math. Bd. 69.)

Es mögen $(n+1)$ homogene Funktionen von n Veränderlichen gegeben sein und man bilde aus ihnen, indem man je n verbindet, die $(n+1)$ Jacobischen Determinanten; aus diesen bilde man aber wiederum $(n+1)$ Jacobische Determinanten, indem man sie zu je n vereinigt; es müssen dann bis auf einen gemeinsamen Faktor diese letzteren Funktionen dieselben sein, wie die, von denen wir ausgegangen sind.

Der Nachweis des Lehrsatzes geschieht auf folgende Weise.

Es seien $f_1 f_2 \dots f_{n+1}$ die gegebenen $(n+1)$ homogenen Funktionen, $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{n+1}$ ihre Jacobischen Determinanten und $\psi_1 \psi_2 \dots \psi_{n+1}$ die Jacobischen Determinanten der φ.

Wir stellen die Determinante auf

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & a_1 & b_1 \\ . & \dots & . & . & . \\ \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x_n} & a_{n+1} & b_{n+1} \\ 0 & \dots & 0 & \sum a_i f_i & \sum b_i f_i \end{vmatrix}$$

Entwickelt nach den Produkten der Minoren, die in den beiden letzten Spalten enthalten sind, und der ihnen zugehörigen algebraischen Komplemente, ergiebt diese Determinante den Ausdruck:

$$\sum_i b_i f_i \sum_k a_k \psi_k - \sum_i a_i f_i \sum_k b_k \psi_k = \sum_{ik} b_i a_k (f_i \psi_k - f_k \psi_i)$$

Zieht man indessen von der letzten Zeile die vorausgehenden ab, beziehungsweise multipliziert mit

$$f_1 \; f_2 \cdots f_{n+1},$$

so werden die beiden letzten Elemente der letzten Zeile Null und die andern Elemente nehmen die Gestalt an:

$$-\sum_i f_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots n)$$

dies ist aber gleich

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \sum_i f_i \varphi_i + \sum_i \varphi_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

Von diesen beiden Summenausdrücken ist der zweite Null, denn, erinnern wir uns, dass jedes φ_i eben die Funktionaldeterminante für n Funktionen unter den f vorstellt, so ist diese Summe nichts andres, als die Entwicklung einer Determinante, deren Elementenschema aus der Matrix der $n(n+1)$ Ableitungen der f hervorgeht, wenn man diese mittelst einer Zeile vervollständigt, deren Elemente die Ableitungen der f rücksichtlich x_j darstellen; gedachte Summe stellt mithin gerade die Entwicklung einer Determinante mit zwei identischen Zeilen dar.

Auch die erste Summe verschwindet, weil

$$\sum f_i \varphi_i$$

genau der Entwicklung der Determinante $K(f_1 \ldots f_{n+1})$ (Siehe § 59) gleichkommt, die doch bekanntlich (Siehe S. 229) verschwindet, sobald die f homogen sind, wie wir es hier gerade annehmen. Es wird daher auch die Ableitung dieser Summe mit Bezug auf x_j Null sein. Wir erfahren hieraus, dass R nach jener Umwandlung alle Stellen der letzten Zeile mit Nullwerthen besetzt enthalten wird und können daher schliessen, dass R unabhängig von den a und den b verschwindet.

In der Entwicklung von R müssen also verschwinden alle Koeffizienten der verschiedenen Verbindungen von a und b; das heisst, wir können aussprechen, dass man für eine beliebige Kombination i, k stets erhält:

$$f_i \psi_k - f_k \psi_i = 0$$

Daraus folgt:

$$\frac{f_i}{f_k} = \frac{\psi_i}{\psi_k}$$

oder es fallen die f, abgesehen von einem gemeinsamen Faktor, mit den ψ zusammen.

Clebsch bemerkt in seinem oben angeführten Aufsatz auf S. 356, von grosser Wichtigkeit sei eine Untersuchung über den Faktor, durch den sich die f von den ψ unterscheiden und er führt diese Untersuchung auch für die Fälle $n + 1 = 3$ und $n + 1 = 4$ durch.

Derselbe Schriftsteller beschäftigt sich dann mit der nämlichen Nachforschung noch unter dem Titel: Note zu dem Aufsatze „Über eine Eigenschaft von Funktionaldeterminanten" im Journ. f. Math. Bd. 70 (1869) [175—181].

Eine ähnliche Untersuchung führt Rosanes in seiner Abhandlung: Über Funktionen, welche ein den Funktionaldeterminanten analoges Verhalten zeigen. Journ. f. Math. Bd. 75 (1873) [166—171]. Hier handelt es sich um Determinanten, die aus den zweiten Ableitungen von drei gegebenen Funktionen zweier Veränderlichen gebildet sind.

§ 62. Systeme Jacobischer Determinanten von n Funktionen $(n + 1)$ Veränderlicher.

Während wir im vorangehenden Paragraphen einen bemerkenswerthen Lehrsatz über Systeme Jacobischer Determinanten von $(n + 1)$ Funktionen n Veränderlicher mitgetheilt haben, wollen wir hier im Gegentheil gewisse Systeme von n Funktionen $(n + 1)$ Veränderlicher betrachten.

Es seien vorgelegt die n Funktionen

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

der $(n + 1)$ Veränderlichen

$$x_1\ x_2\ \dots\ x_{n+1}$$

Lassen wir jedesmal eine Veränderliche bei Seite, so können wir $(n + 1)$ Jacobische Determinanten darstellen; es sind die in der folgenden rechteckigen Matrix enthaltenen.

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_1}{\partial x_{n+1}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_{n+1}} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} & \frac{\partial y_n}{\partial x_{n+1}} \end{matrix} \right\|$$

Nennen wir nun der Reihe nach

$$\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_{n+1}$$

die $(n+1)$ Determinanten, die aus dieser Matrix hervorgehen, wenn man einfach die 1-te, 2-te, ... $(n+1)$-te Spalte unterdrückt, so besteht dann die Formel:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_1 - \frac{\partial}{\partial x_2}\psi_2 + \dots + (-1)^n \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\psi_{n+1} = 0$$

Diese Formel findet sich bei

Jacobi, Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi. Journ. f. Math. Bd. 27 (1844) [199—268],

man kann von ihr auch nachlesen

Neumann, C., Zur Theorie der Funktionaldeterminanten. M. A. Bd. 1 (1869) S. 208 f.

Es folgt hier der Beweis, den wir für diese Formel geben wollen.

Wie sich leicht zeigen lässt, werden die Glieder, die man gewinnt, wenn man die angedeuteten Ableitungen mit abwechselnden Vorzeichen summiert, zu zwei und zwei sich zu Null aufheben.

Wirklich wird das Glied, das zum Beispiel

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \, \partial x_2}$$

enthält, zwei Mal vorhanden sein, einmal wenn von ψ_2 die Ableitung nach x_2 und einmal, wenn von ψ_1 die Ableitung nach x_1 gebildet wird.

Die Koeffizienten dieser beiden Glieder sind beziehungsweise:

$$-\begin{vmatrix} \frac{\partial y_3}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial y_3}{\partial x_{n+1}} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_{n+1}} \end{vmatrix}$$

und

$$+\begin{vmatrix} \frac{\partial y_3}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial y_3}{\partial x_{n+1}} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_{n+1}} \end{vmatrix}$$

ihre Summe gleich Null. Auf ähnlichem Wege lässt sich erkennen, dass die Koeffizienten der verschiedenen zweiten Ableitungen sämmtlich Null sind und damit ist die oben angegebene Formel bewiesen.

§ 63. Die Jacobische Determinante dreier Kurven.

Die Beschäftigung mit der Funktionaldeterminante gewinnt eine besondere Wichtigkeit in der Lehre von den algebraischen Kurven. Wir können hier natürlich bei diesem Gegenstande nicht lange verweilen, sondern werden uns darauf beschränken, nur die hauptsächlichen Eigenschaften zu erwähnen.

Es seien gegeben drei algebraische Kurven durch ihre Gleichungen in den homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3:

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \chi = 0$$

Wir wollen die Jacobische Determinante dieser drei Funktionen bilden und sie gleich Null setzen; wir werden damit die Gleichung einer Kurve erhalten und diese heisst die Jacobische Kurve für das System der drei Kurven.

Sie besitzt in Hinsicht auf die drei Kurven viele einzigartige Eigenschaften. Zunächst ist sie offenbar, wenn m, m', m'' die Ordnungszahlen der drei gegebenen Kurven darstellen, selbst eine Kurve von der Ordnung

$$m + m' + m'' - 3$$

Überdies geht sie durch alle gemeinschaftlichen Punkte der drei Kurven hindurch. Denn multiplizieren wir die zwei ersten Spalten der Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \chi}{\partial x_1} & \frac{\partial \chi}{\partial x_2} & \frac{\partial \chi}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

mit x_1 und x_2 und fügen sie zur dritten hinzu, nachdem diese mit x_3 multipliziert wurde, so ergiebt sich in Folge der homogenen Beschaffenheit der Funktionen φ, ψ, χ:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & m\varphi \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & m'\psi \\ \frac{\partial \chi}{\partial x_1} & \frac{\partial \chi}{\partial x_2} & m''\chi \end{vmatrix}$$

Betrachtet man nun einen den drei Kurven gemeinschaftlichen Punkt, so werden für diesen die Elemente der letzten Spalte Null, mithin verschwindet auch die Determinante.

Man kann die Jacobische Kurve leicht als einen geometrischen Ort bestimmen.

Ziehen wir die Polaren eines Punktes $(y_1\, y_2\, y_3)$ mit Bezug auf die drei Kurven. Es ergiebt sich dafür:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} X_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} X_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} X_3 = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1} X_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y_2} X_2 + \frac{\partial \psi}{\partial y_3} X_3 = 0$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial y_1} X_1 + \frac{\partial \chi}{\partial y_2} X_2 + \frac{\partial \chi}{\partial y_3} X_3 = 0$$

Nehmen wir an, diese drei Geraden gingen durch einen und denselben Punkt, das heisst also, diese drei Gleichungen würden von demselben System der Werthe für die X befriedigt werden. Dann muss die Determinante des Systems Null sein und es ergiebt sich daher, dass der Punkt (y) der Gleichung der Jacobischen Kurve Genüge leisten muss. Wir können also schliessen:

Die Jacobische Kurve des Systemes dreier Kurven ist der Ort solcher Punkte, deren Polargeraden mit Bezug auf die drei Kurven sich in ein und demselben Punkte treffen.

Stellen wir uns vor, die drei Kurven wären von derselben Ordnung. Dann kann man mit ihnen ein sogenanntes Netz bilden

$$\lambda \varphi + \mu \psi + \nu \chi = 0.$$

Man hat, wenn man λ, μ, ν sich ändern lässt, hierin eine doppelt unendliche Schaar von Kurven.

Die Jacobische Kurve des Systems dreier Kurven wird man dann nennen können Jacobische Kurve des Netzes. Betrachtet man sie von diesem Gesichtspunkte aus, so kann man für sie zwei recht beachtenswerthe geometrische Begriffsbestimmungen geben.

Damit eine beliebige Kurve des Netzes einen Doppelpunkt habe, ist nöthig, dass die drei Bedingungen erfüllt werden:

$$\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \chi}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Wenn die Koordinaten eines Punktes (x) diesen drei Bedingungen genügen, so genügen sie auch der weiteren Bedingung, die dargestellt wird, indem man die Determinante der Koeffizienten von λ μ, ν gleich

Null setzt. Nun bildet diese Determinante gerade die linke Seite in der Gleichung der Jacobischen Kurve. Also gilt der Satz:

Die Jacobische Kurve eines Netzes ist der Ort der Doppelpunkte der Kurven des Netzes.

Die an eine Kurve φ_1 gezogene Tangente wird ausgedrückt durch

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} X_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} X_3 = 0$$

die Tangente zur Kurve ψ_1 durch

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} X_2 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} X_3 = 0$$

und hierbei werden die X als die laufenden Koordinaten angesehen, (x) als Berührungspunkt. Wenn die beiden Kurven gemeinschaftliche Tangenten haben sollen, so muss, abgesehen von einem Faktor, die linke Seite der zweiten Gleichung denselben Betrag haben, wie die der ersten, oder also, es müssen die Ableitungen von ψ_1 proportional sein denen von φ_1 und zwar für den Berührungspunkt (x).

Mit anderen Worten, es müssen alle Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} \end{array} \right\|$$

verschwinden.

Sind $\varphi_1 = 0$ $\psi_1 = 0$ die Gleichungen von zwei Kurven des Netzes, sind sie also von der Form

$$\varphi_1 = \lambda_1 \varphi + \mu_1 \psi + \nu_1 \chi$$
$$\psi_1 = \lambda_2 \varphi + \mu_2 \psi + \nu_2 \chi$$

dann hat das Verschwinden aller Determinanten der angeführten Matrix das Verschwinden der Determinante, die die Jacobische Kurve darstellt, zur weiteren Folge.

Denn wenn wir in

$$J = \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \chi}{\partial x_1} & \frac{\partial \chi}{\partial x_2} & \frac{\partial \chi}{\partial x_3} \end{array} \right|$$

zur dritten Zeile, nachdem sie mit ν_2 multipliziert wurde, die zweite und erste hinzufügen, beziehungsweise mit μ_2 und λ_2 multipliziert, so

erhalten wir auf der dritten Zeile genau die Ableitungen von ψ_1. Weiterhin wollen wir zur zweiten Zeile, nachdem wir sie mit

$$\mu_1 - \frac{\nu_1}{\nu_2}\mu_2$$

multipliziert haben, die erste hinzufügen, mit dem Faktor

$$\lambda_1 - \frac{\nu_1}{\nu_2}\lambda_2$$

versehen und die dritte, nach Vornahme der oben besprochenen Änderung, multipliziert mit

$$\frac{\nu_1}{\nu_2}.$$

So werden in der zweiten Zeile dann genau die Ableitungen von φ_1 erscheinen. Also wird sich J in eine andere Determinante verwandeln, bei der zwei Zeilen mit der vorangehenden Matrix übereinkommen. Ist diese Matrix Null, so wird auch die Determinante Null sein. Also dürfen wir aussprechen:

Die Jacobische Kurve des Netzes lässt sich als der Ort der Punkte ansehen, in denen zwei Kurven des Netzes sich berühren.

§ 64. Hessesche Determinanten. Wendepunkte der Kurven. Krümmung der Oberflächen.

Wir wollen zu einer Funktion von n Veränderlichen ihre n ersten Ableitungen bilden. Wird aus diesen n Ableitungen die Funktionaldeterminante dargestellt, so ergiebt sich eine symmetrische Determinante, zusammengesetzt aus den Ableitungen zweiter Ordnung der gegebenen Funktion, und diese heisst Hessesche Determinante der vorgelegten Funktion, weil Hesse zuerst ihre Eigenschaften untersucht hat.

Hesse, Über die Elimination der Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Variabeln. Journ. f. Math. Bd. 28 (1844) [68—96], wieder abgedruckt in Hesse, Ges. Werke, München 1897 [89—122].

Sylvester, Sketch of a memoir on elimination, transformation and canonical forms. Cambr. Dubl. math. Journ. vol. 6 (1851) [186—200].

Hesse, Über die Bedingung, unter welcher eine homogene ganze Funktion von n unabhängigen Variabeln durch lineäre Substitutionen von n andern unabhängigen Variabeln auf eine homogene Funktion sich zurückführen lässt, die eine Variable weniger enthält. Journ. f. Math. Bd. 42 (1851) [117—124], wieder abgedruckt in Hesse, Ges. Werke, München 1897 [289—296].

Hesse, Zur Theorie der ganzen homogenen Funktionen. Journ. f. Math. Bd. 56 (1859) [263—269], wieder abgedruckt in Hesse, Ges. Werke, München 1897 [481—488].

Die Beschäftigung mit der Hesseschen Determinante gewinnt im Besonderen in der Lehre von den Kurven und Oberflächen ihre Bedeutung.

Sei gegeben eine ebene Kurve von der Ordnung m und zwar durch die Gleichung in homogenen Koordinaten

$$F(x_1 x_2 x_3) = 0.$$

Die Hessesche Determinante wird augenscheinlich vom Grade

$$3\,(m-2);$$

setzen wir sie gleich Null, so erhalten wir die Gleichung einer Kurve der Ordnung $3\,(m-2)$. In welchen Punkten trifft diese Kurve unsere gegebene Kurve?

Wir wollen einmal zunächst die Gleichung der Kurve nicht in homogenen, sondern in rechtwinkligen Koordinaten uns vorstellen, also

$$f(xy) = 0$$

Bekanntlich wird der Krümmungshalbmesser in einem Punkt der Kurve gegeben durch die Gleichung

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

wo wir unter y', y'' die erste und zweite Ableitung von y mit Bezug auf x verstehen. Wollen wir diesen Halbmesser R mittelst der Ableitungen von f bezüglich x und y ausdrücken, so haben wir uns der Gleichungen zu bedienen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0,$$

woraus hervorgeht:

$$(1+y'^2)^{\frac{3}{2}} = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}$$

$$y'' = -\frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right]$$

Daher wird:

$$R = -\frac{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}$$

Wir wollen nun diese Formel durch die Einführung homogener Koordinaten umwandeln.

Wir bemerken, dass der Nenner des Ausdruckes für R sich auf folgende Weise in Gestalt einer Determinante schreiben lässt:

$$-\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}$$

Setzt man indessen:

$$x = \frac{x_1}{x_3} \qquad y = \frac{x_2}{x_3}$$

so ergiebt sich

$$F(x_1 x_2 x_3) = x_3^m f(x y)$$

Für $x_3 = 1$ werden x, y übereinstimmen mit x_1, x_2 und die Ableitungen von F nach x_1, x_2 werden genau die entsprechenden Ableitungen von f mit Bezug auf x, y.

Wir können leicht nachweisen, dass die Hessesche Determinante

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1\,\partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1\,\partial x_3} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1\,\partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2\,\partial x_3} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1\,\partial x_3} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2\,\partial x_3} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}$$

abgesehen von einem Faktor der oben niedergeschriebenen Determinante genau gleich kommt, wenn von homogenen Koordinaten der Übergang zu Cartesischen gemacht, wenn also $x_3 = 1$ gesetzt wird. Denn nach der Eulerschen Formel ergiebt sich ja:

$$mF = 0 = x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial F}{\partial x_3}$$

$$(m-1)\frac{\partial F}{\partial x_1} = x_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + x_2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1\,\partial x_2} + x_3 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1\,\partial x_3}$$

und so fort.

Multiplizieren wir also die Elemente der ersten Spalte mit x_1, die der zweiten und dritten mit x_2 und x_3, verbinden die entsprechenden Ergebnisse additiv und besetzen damit die Stellen der letzten Spalte, so verwandelt sich die vorausgehende Determinante in diese:

$$H = \frac{m-1}{x_3} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial F}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

und wenden wir nun dieselben Formeln an und addieren zur dritten Zeile, die wir mit x_3 multipliziert haben, die erste und die zweite beziehungsweise multipliziert mit x_1 und x_2, so ergiebt sich:

$$H = \frac{(m-1)^2}{x_3^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & 0 \end{vmatrix}$$

Wie man sieht, würde bei Annahme von $x_3 = 1$ die Funktion F übergehen in f und die Ableitungen bezüglich x_1, x_2 übergehen in die auf x, y sich beziehenden, also würde H abgesehen von dem Faktor

$$-\frac{1}{(m-1)^2}$$

gerade mit der oben (Siehe S. 246) niedergeschriebenen Determinante übereinkommen.

Wir können demnach in homogenen Koordinaten schreiben:

$$R = (m-1)^2 \frac{1}{x_3^2} \frac{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{H}$$

Hieraus wird ersichtlich, dass an den Punkten der Kurve, wo $H = 0$, also an den Punkten, die Schnittpunkte der Kurve $H = 0$ und der Kurve $F = 0$ sind, von der wir ausgingen, der Krümmungshalbmesser unendlich wird. Das heisst aber, diese Punkte sind Wendepunkte für die vorgelegte Kurve.

Wir erhalten also den Satz:

Die Hessesche Kurve schneidet die ursprüngliche Kurve in den Wendepunkten der letzteren, mithin giebt es im Allgemeinen $3(m-2)m$ Wendepunkte,

wenn man bedenkt, dass die beiden Kurven $F = 0$, $H = 0$ beziehungsweise die Ordnungen m, $3(m - 2)$ haben, sich daher in

$$3m(m - 2)$$

Punkten schneiden.

Wir kommen nun zu den Oberflächen.

Es sei eine Oberfläche durch die Gleichung $f(xyz) = 0$ gegeben.

In diesem Fall wird die Krümmung durch die Formel ausgedrückt:

$$C = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}$$

wobei p, q die ersten Ableitungen von z sind nach x und y, und r, s, t beziehungsweise die zweiten Ableitungen, also:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial q}{\partial y}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

Wir werden nun hier die Ableitungen von f einführen, die wir mit $f_1, f_2, f_3; f_{11}, f_{22}, f_{12}, \ldots$ bezeichnen. Da

$$p = -\frac{f_1}{f_3}, \qquad q = -\frac{f_2}{f_3}$$

ist, so findet sich:

$$(rt - s^2) = \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{1}{f_3^3} \begin{vmatrix} f_1 & \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ f_2 & \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ f_3 & \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Nun ist:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = f_{11} + f_{13} p$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = f_{12} + f_{13} q$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = f_{21} + f_{23} p$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

und hiernach kann obige Determinante geschrieben werden:

$$-\frac{1}{f_3^4} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & f_3 \\ f_1 & f_{11} + f_{13} p & f_{12} + f_{13} q & f_{13} \\ f_2 & f_{21} + f_{23} p & f_{22} + f_{23} q & f_{23} \\ f_3 & f_{31} + f_{33} p & f_{32} + f_{33} q & f_{33} \end{vmatrix} = -\frac{1}{f_3^4} \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$$

Durch eine Überlegung, die der vorher angewendeten genau entspricht, zeigt man, dass diese Determinante, von einem Faktor abgesehen, sich als die Hessesche Determinante von f darstellt, wenn man darin homogene Veränderliche einführt.

Setzen wir nämlich

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \qquad y = \frac{x_2}{x_4}, \qquad z = \frac{x_3}{x_4}$$

und

$$F(x_1 x_2 x_3 x_4) = x_4^m f(x y z)$$

so ergiebt sich dann

$$C = -\frac{x_4^{\,4}}{(m-1)^2 (F_1^{\,2} + F_2^{\,2} + F_3^{\,2})^2} H,$$

wenn wir mit H die Hessesche Determinante von F bezeichnen.

Diese Formel entspricht durchaus derjenigen, die man für Kurven erhält. Die Oberfläche $H = 0$ heisst die Hessesche Fläche und ist von der Ordnung

$$4(m-2).$$

Die Punkte der verschwindenden Krümmung von $F = 0$ sind auf der Hesseschen Fläche gelegen, man nennt sie die parabolischen Punkte der Oberfläche.

§ 65. Weitere Untersuchungen über die Hesseschen Determinanten.

Wir kommen jetzt dazu, im Allgemeinen die Hessesche Determinante auszurechnen für den Fall, dass man von homogenen Veränderlichen zu nicht homogenen übergeht.

Es sei $F(x_1 \ldots x_n)$ eine homogene Funktion vom Grade m in den n Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ und indem man setzt:

$$\frac{x_1}{x_n} = X_1, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n} = X_{n-1}$$

sei

$$F(x_1 \ldots x_n) = x_n^m f(X_1 \ldots X_{n-1})$$

also sei f im Grunde dieselbe Funktion, wie die vorgelegte, nur in nicht homogenen Veränderlichen geschrieben.

Wir bilden die Hessesche Determinante von F bezüglich der n Veränderlichen

$$\begin{vmatrix} F_{11} & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ F_{n1} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}$$

Fügen wir zur letzten Spalte, nachdem wir sie mit x_n multipliziert haben, die vorausgehenden hinzu, diese beziehungsweise mit $x_1 \dots x_{n-1}$ multipliziert, und nehmen dabei Bedacht auf die Eulerschen Gleichungen, so erhalten wir, abgesehen von einem Faktor,

$$\begin{vmatrix} F_{11} & \dots & F_{1,n-1} & F_1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ F_{n-1,1} & \dots & F_{n-1,n-1} & F_{n-1} \\ F_{n,1} & \dots & F_{n,n-1} & F_n \end{vmatrix}$$

Verfahren wir nun auf ähnliche Weise mit den Zeilen, multiplizieren also die erste, zweite, ... Zeile beziehungsweise mit $x_1, x_2, \dots$, addieren sie dann alle zur n-ten Zeile, nachdem diese letztere vorerst mit x_n multipliziert worden, und nehmen wiederum auf die Eulerschen Gleichungen Rücksicht, so ergiebt sich, abgesehen von einem Faktor,

$$\begin{vmatrix} F_{11} & \dots & F_{1,n-1} & F_1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ F_{n-1,1} & \dots & F_{n-1,n-1} & F_{n-1} \\ F_1 & \dots & F_{n-1} & \frac{m}{m-1} F \end{vmatrix}$$

Wie man sieht, ist also jede Spur, die an die Ableitung nach x_n erinnern könnte, verschwunden. Setzen wir nun $x_n = 1$, so verwandeln sich die Ableitungen von F in die entsprechenden Ableitungen von f bezüglich der nicht homogenen Veränderlichen und es erscheint die Determinante:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{1,n-1} & f_1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ f_{n-1,1} & \dots & f_{n-1,n-1} & f_{n-1} \\ f_1 & \dots & f_{n-1} & \frac{m}{m-1} f \end{vmatrix}$$

Hiernach wird diese Determinante bis auf einen Zahlenfaktor mit der Hesseschen Determinante der vorgelegten Funktion übereinstimmen.

Wir wollen nun in zweiter Linie prüfen, welche Form die Hessesche Determinante einer homogenen Funktion in n Veränder-

lichen annimmt, wenn diese Veränderlichen einer linearen Transformation unterworfen werden.

Wir werden finden, dass abgesehen von einem Faktor, der von den Koeffizienten der Transformation abhängig ist, die Hessesche Determinante unverändert erhalten bleibt; es kommt dies damit überein zu sagen: die Hessesche Determinante ist eine zur vorgelegten Funktion **kovariante** Bildung.

Man verwandle die x_i durch die Substitutionen

$$x_i = \sum_j a_{ij} y_j \qquad (i, j = 1, 2, \dots n)$$

und setze die Determinante

$$| a_{ij} | = \Delta$$

Dann behaupten wir: Werden die Bezeichnungen

$$H(x), \quad H(y)$$

gewählt beziehungsweise für die Hesseschen Determinanten der Funktion $F(x)$ in x und der aus ihr durch Umwandlung entstandenen Funktion in y, so ergiebt sich einfach

$$H(y) = H(x) . \Delta^2$$

Setzen wir fest, es werde $F(x)$ in den y ausgedrückt zu $\Phi(y)$. Man hat nun

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_i \, \partial y_j} = \sum_k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_i \, \partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} = \sum_k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_i \, \partial x_k} a_{kj}$$

und daraus ersieht man nach Anwendung der Regel für die Multiplikation der Determinanten, dass die Hessesche Determinante von Φ gleich ist dem Produkte der aus den Elementen a_{jk} gebildeten Determinante und einer Determinante aus den Elementen

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_i \, \partial x_k}$$

Nennt man diese Determinante Ω, so ergiebt sich also

$$H(y) = \Omega . \Delta .$$

Nun hat man wiederum die Formel:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_i \, \partial x_k} = \sum_h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_k \, \partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial y_i} = \sum_h \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \, \partial x_h} a_{hi}$$

und mithin ist die Determinante Ω gleich der Hesseschen Determinante von F multipliziert mit Δ. Daraus folgt schliesslich

$$H(y) = H(x)\,\Delta^2$$

wie wir es nachweisen wollten.

Wenn nach der Umwandlung der x in die y die Funktion Φ eines der y, zum Beispiel y_r nicht enthalten soll, so ist ihre Ableitung mit Bezug auf y_r gleich Null zu setzen, dann werden also alle Elemente einer Zeile von $H(y)$ Null, mithin $H(y)$ und in Folge davon auch $H(x)$ gleich Null sein.

Man sieht hieraus, ist die gegebene Funktion von der Beschaffenheit, dass die Zahl ihrer Veränderlichen um eine Einheit verringert wird, wenn sie jene lineare Transformation erleidet, dann ist ihre Hessesche Determinante Null.

Man stand eine Zeit lang in dem Glauben, es sei auch der umgekehrte Lehrsatz allgemein wahr, mit andern Worten, es bilde das Verschwinden der Hesseschen Determinante die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die gegebene homogene Funktion von n Veränderlichen sich in eine andere von $(n - 1)$ Veränderlichen umwandeln lasse.

In den beiden zu Anfang des § 64 angeführten Aufsätzen (Journ. f. Math, Bd. 42 u. Bd. 56) hatte Hesse geglaubt, diesen Lehrsatz bewiesen zu haben.

Es ist jedoch im Gegensatz hierzu festgestellt worden, dass der Lehrsatz nicht bestehen bleibt für homogene Funktionen von mehr als vier Veränderlichen. Hierüber kann man eine Arbeit von Gordan und Noether einsehen.

Gordan und Noether, Über die algebraischen Formen, deren Hessesche Determinante identisch verschwindet. M. A. Bd. 10 (1876) [547—568].

Andere Aufsätze über denselben Gegenstand finden sich noch von:

Pasch, Zur Theorie der Hesseschen Determinante. Journ. f. Math. Bd. 80 (1875) [169—176].

Gordan, Über einen Satz von Hesse. Phys. Med. Soc. Erl. Ber. 8. Heft (1876) [89—94].

Noether, Über die algebraischen Formen mit identisch verschwindender Hessescher Determinante. Phys. Med. Soc. Erl. Ber. 8. Heft (1876) [51—56].

Die Möglichkeit der Umwandlung in eine homogene Funktion, bei der die Anzahl der Veränderlichen geringer ist, hängt mit dem Bestehen einer linearen Beziehung zusammen zwischen den n ersten Ableitungen der Funktion und zwar mit konstanten Koeffizienten.

Denn wirklich, besteht die identische Gleichung:

$$c_1 F_1 + c_2 F_2 + \cdots + c_n F_n = 0$$

worin die c Konstanten sind und die F_i die ersten Ableitungen der

Funktion F darstellen, dann wird, wenn man die folgende lineare Transformation ausführt:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + c_1 y_n \\ x_2 &= y_2 + c_2 y_n \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{n-1} &= y_{n-1} + c_{n-1} y_n \\ x_n &= c_n y_n \end{aligned}$$

die Ableitung von Φ (der umgewandelten Funktion) mit Bezug auf y_n lauten:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_n} = \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_n} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_n} = c_1 F_1 + \cdots + c_n F_n = 0$$

also, es wird Φ die Veränderliche y_n nicht mehr enthalten. Umgekehrt, wenn nach der Transformation

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_i a_{1i} y_i \\ &\cdot \quad \cdot \\ x_n &= \sum_i a_{ni} y_i \end{aligned}$$

die Funktion Φ die Veränderliche y_n nicht mehr enthält, dann wird ihre Ableitung bezüglich y_n verschwinden, also wird sein

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_n} = \frac{\partial F}{\partial x_1} a_{1n} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n} a_{nn} = 0$$

oder

$$a_{1n} F_1 + \cdots + a_{nn} F_n = 0$$

Wenn also der Hessesche Lehrsatz zu Recht bestünde, so würde auch dieser Satz giltig sein, dass die Beziehung, die sicherlich zwischen den ersten Ableitungen vorhanden sein muss, im Fall die Hessesche Determinante gleich Null ist (da ja die Hessesche Determinante nichts andres ist als die Jacobische für die n abgeleiteten Funktionen), auch stets als eine lineare homogene Gleichung bestehen müsste. Nun erweist sich dies als falsch für $n > 4$. Der Lehrsatz von Hesse ist aber im Gegentheil richtig für $n \leqq 4$. (Siehe die oben angeführten Aufsätze von Pasch, Gordan, Noether.)

Wenden wir dies Ergebniss auf geometrischem Gebiete an, so können wir aussprechen:

Eine Kurve, deren Hessesche Determinante identisch verschwindet, zerfällt in Gerade, die von einem Punkte ausgehen. Eine Oberfläche, bei der die Hessesche Determinante identisch verschwindet, ist ein Kegel.

Zahlreiche Untersuchungen sind über die Hessesche Determinante von dem Gesichtspunkte der Geometrie und der Lehre von den Formen aus angestellt worden.

In dem Fall der binären Formen (homogenen Funktionen von zwei Veränderlichen) erhält man, wenn man die Wurzeln der Hesseschen Determinante mit Rücksicht auf die der gegebenen Form behandelt, bemerkenswerthe Ergebnisse. Hierzu vergleiche man die Arbeiten von Gerbaldi und Schoute.

Gerbaldi, Un teorema sull' Hessiana d'una forma binaria. Rend. Circ. mat. Pal. t. 3. 1889. parte prima [22—26].

Schoute, Sur un théorème relatif à l'Hessienne d'une forme binaire. Rend. Circ. mat. Pal. t. 3. 1889. parte prima [160—164].

Verzeichniss der Literaturnachweise.

Die Seitenzahl steht in eckigen Klammern, wenn der betreffende Nachweis eine Wiederholung ist. Lb. bedeutet Lehrbuch der Determinanten, Rep. das Repertorium der höheren Mathematik I Leipzig 1900.

Albeggiani 37, 164, [171].
Anglin 131.
Armenante 185, [191].
Arnaldi 45.
Bachmann 163.
Bagnera 124.
Baltzer 47, 82, [207].
Baltzer Lb. 25, 47, 60, 64, 67, 129, 131, 150, 157, 165, 205, 214, 222.
Barbier 84, 84.
Baur 205.
Bernoulli 156.
Besso 130.
Bezout 205, 205, [206].
Binet 25.
Bonolis 37, 135.
Borchardt 84, 84, [96], 130, 130, 130, [131], 207, [207], 207, [217].
Brioschi 164, [165], 207, 219, 219, [221], 221, 221.
Caldarera 135.
Cantor 163.
Capelli 42, 43, 201, [205], 205.
Capelli-Garbieri 142, 195.
Casorati 222, [228].
Caspary 106.
Catalan 139, 149.
Cauchy 25, [83], [86], 164.
Cayley 47, 60, [60], 60, 71, [164], 206, 207, 207, [217], 222.
Cazzaniga 43, 176, 176, 176, 176.
Cesàro 142, 149, 149, 205.
Christoffel 50.
Clebsch 180, 207, 218, 219, [219], [219], [221], 222, [229 f.], [237], [239], 239.
Cramer 205.
Cremona 73, 151, [151].
Crocchi 130.
Dahlander 185.
Darboux 207, 207, [212], [214].
De Gasparis, siehe G.
Del Re, siehe R.
De Presle, siehe P.
Dickstein 130.
Diekmann 74.
Dietrich 147.
Donkin 222.
Dostor 146.
D'Ovidio, siehe O.
Drude 82.
Enzyklopädie d. math. Wiss.:
Meyer 71, 163, 221.
Netto 67, 205, 208, 221, 222.
Pringsheim 157, 176.
Vahlen 130.
Engel 60.
v. Escherich 104, [107], [109], 144, 185.
Euler 164, 164, 205, 206, [206].
Faà di Bruno 207.
Ferrara 142.
Fiore 130.
Fouret 140, 140.
Franke 84.
Frobenius 50, 50, [70], 84, 85, [94], [107], 163.
Fürstenau 122.
Garbieri 130, 145, 185, 185, [205], 207, 207, [212].
Garbieri, siehe Capelli.
De Gasparis 185, 185.
Gegenbauer 82, 82, 185, 185, 185, 185, 185, 185.
Gerbaldi 254.
Glaisher 73, 73, [74], 138, 138.
Gordan 218, 218, [219], 221, 252, 252, [253].
Gordan Lb. 28, 222.
Grassmann 60.
Günther 143, 156, 156, 156, 156.
Günther Lb. 25, 59, 60, 64, 69, 131, 133, 137, 143, 145, 156, 184, 185.
Gundelfinger 206.

Hadamard 180, [184].
Hahn 235.
Hankel 67.
Haussner 137, 137.
Heffter 48.
Heine 156.
Hensel 107, [109].
Hermite 163, 163, 163, 206.
Hesse 44, 50, 55, 164, 180, 206, 244, 244, 244, [252], [252].
Hill 175.
Hioux 207.
Hunyady 84, 104, 104, 104, 106, 106, 106, 106, 106, 106, 107, 124, 124.
Igel 85, 104, [107], [109], [165], 207.
Jacobi 38, 60, 60, 70, 129, 164, 164, [206], [222], 222, 222, [228], 240.
Janni, G. 84.
Janni, V. 39, 52, 135, 138, 145.
von Koch 176, 176, [178], [178].
König 50.
Kötteritzsch 175.
Kronecker 91, 107, 164, 164, 207, 207, [212], [222].
Kummer 73.
Lagrange 206.
Laisant 143.
Laplace 38, [205].
Lemonnier 151, 207.
Le Paige 52, 149, 178.
Loewy 163, 163.
Loria 131, 164.
Lucas 137, 143, 153.
Lüroth 207, [217].
Maisano 221, 221, 221.
Malmstén 48.
Mansion 148, 149, 149.
Mansion Lb. 144.
Marcolongo 130.
Mertens 106.
Meyer 207.
Minozzi 73.
Mollame 157.
Monro 47.
Muir 73, [74], [80], 103, 156, 156, 156.
Müller, E. 106.
Musso 84, 84.
Muth 175.
Naegelsbach 130, 130, 137.
Netto 70, 84, 85, [94], [97], [99], [107], [120], 162, [164], 165, 165, [172], [174], [207], [212].
Neumann C. 222, [240].
Noether 79, 79, 207, [217], 252, 252, [253].
D'Ovidio 84, 84, 84, [93], 138, 205, 219, 219, 219.
Padova 185.
Painvin 156.
Pascal, E., 103, 114, [120], 121, 124, [127], 219, 219, [219], 219.
Pascal, E., Rep. 136, 218, 221.
Pasch 50, 106, 235, 235, 252, [253].
Peano 48, 48.
Picquet 55, 84, [84], [94], 107, [107], [109], [110], [112].
Poincaré 175, 175.
de Presle 52.
Prym 163.
Puchta 79, 80.
Rados 109.
Raimondi 149.
Ramus 156.
del Re 130.
Reiss 84, [91], [94], [99].
Richelot 206.
Roberts 142.
Rosanes 239.
Rosenhain 206, 206, [217].
Rouché 205.
Rubini 130.
Saalschütz 137.
Salmon 221.
Sardi 28, 142.
Scarpis 184.
Scheibner 60, 207.
Schering 38, [60].
Scherk 137.
Schlaefli 164, 164.
Schlesinger 48.
Schlömilch 137.
Scholtz 104, 104.
Schoute 254.
Schütz 74.
Scott 73, 84, 185.
Scott Lb. 114, 131, 133, 150, 157, 165, 185, 222.
Siacci [64], 107, 107, [114], [114], 164, [164], [168], [172].
Smet-Jamar 142.
Smith 148.
Souillart 73.
Spottiswoode 84, [156].
Stäckel 25, 129, 222.
Stahl 207.
v. Staudt 137.
Stephanos 207.
Stern 73, 130, [131], [135], [139].
Stieltjes 164, [173].
Studnička 40, 41, 50, 131, 131, 131, 135, 135, 142, 155, 156.
Sylvester 64, 66, 66, 71, 71, 71, 84, 84, 84, [93], [95], 107, 107, [111], 156,

156, [164], 180, 206, 206, 220, [222], [244].
v. Szüts 47.
Tanner 185.
Tannery 163.
Teixeira 37, 37.
Thiele 156.
Torelli 73, 142, [142], 222, [228], [230].
Trudi 130.
Trudi Lb. 60, 214.
Vahlen 117.
Vandermonde 38, [205].
Veltmann 60, [164].
Van Velzer 84.
Versluys 206.
Vito Eugenio 145.
Voigt 82.
Voss 164, 164, 175.
Weierstrass 44.
Weltzien 53.
Weyrauch 47.
Zajaczkowski 185.
Zehfuss 73, 185.
v. Zeipel 133.

Sachregister.

Die Zahlen bezeichnen die Seiten, der gesperrte Druck weist auf die Stelle dieses Verzeichnisses, wo der betreffende Gegenstand näher behandelt ist.
Abkürzungen: Det. = Determinante, Gl. = Gleichung, L. = Lehrsatz.

Adjungierte Unterdet. (Adjunkte). Siehe algebraisches Komplement.
Algebraisches Komplement (= adjungierter Minor), unterschieden von dem Komplemente (komplementären Minor) 13.
: das Produkt eines Minors in sein algebraisches Komplement einem Aggregate von Determinantengliedern gleichwerthig 14 ff.
: proportionale Beziehung der algebraischen Komplemente, die zu den Elementen zweier parallelen Reihen gehören, in einer nullwerthigen Det. 20 f.
— als Abgeleitete der Det. 47.
— bei der kubischen Det. 190.
Bagneras Lehrsätze über Beziehungen zwischen Det. aus denselben Elementen 124 ff. Fortführung dieser Untersuchung durch E. Pascal.
Bernoullische und Eulersche Zahlen, durch Det. dargestellt § 35 und 138.
Besondere Systeme: aus Elementen, die für jede Spalte zwei Werthe aufweisen, einen in der Kreuzung mit der Hauptdiagonale und einen ausserhalb 142 f., aus den Elementen 0 und 1 140. 144, zur Darstellung ganzer Funktionen 143, binärer Formen 144.
Bezout, Methode zur Darstellung der Resultante 212 ff.
Binet und Cauchy, Produktsatz (Multiplikationstheorem) der Determinanten 25. Siehe Produktdet.
Binomialkoeffizienten, verschiedene Det., deren Elemente — § 34. Siehe auch § 35.
Brioschis L. § 48. Siehe orthogonale Det.
Casorati, L. über Funktionaldet.
Cauchy, siehe Binet.
L. über die reziproke Det.
L. über das Produkt zusammengesetzter Det.
Cayley, Aufgabe mit Bezug auf orthogonale Determinanten § 47.
Verfahren zur Aufsuchung der Resultante 217 f.
Clebsch, L. über Funktionaldet.
Cramers Formel 205, die Auflösung der linearen Gleichungen betreffend.
*Derivations*determinanten = Wronskische Det.
Determinante, begriffliche Erklärung 2, Erweiterung dazu 5.
: symbolische Bezeichnung nach Cayley, Cauchy 2, umbral notation Sylvesters 83.
: zugehörige Bezeichnungen: Schema, Ordnung 2.
: Vorzeichenbestimmung eines Gliedes 2, allgemeiner (§ 2, 2.) 4 f.
Anzahl der Glieder mit positivem, negativem Vorzeichen 2.
: Anzahl der Glieder, die besondere Elemente (k Hauptelemente, kein Hauptelement) enthalten (§ 13.) 46 ff. Literaturbericht 47.
: ihre Abgeleitete, wenn ein Element, wenn alle Elemente als veränderlich gelten 47 f.
: ihr Maximalwerth § 53.
: allgemeine und wesentliche Eigenschaften: Einschränkung auf ein Glied, Wirkung der Vertauschung der Zeilen mit den Spalten, der Vertauschung von zwei parallelen Reihen, Multiplikation mit einer Zahl k, Unveränderlichkeit, Nullwerden, Zerlegung in ein Aggregat von Determinanten

(Additionstheorem), Entwicklung nach Minoren, nach Randelementen (zwei sich kreuzenden Reihen), Multiplikation mit einer anderen Det. (Produktdeterminante), Verfahren der Umwandlung.

: Verhalten unter besonderen Umständen: Zerlegung in Faktoren, Nullwerden, Theilbarkeit, Entwicklung nach Potenzen, Darstellung als Aggregat von Quadraten bei der Det. von Voigt, von Gegenbauer.

: Beziehungen zwischen den aus denselben n^2 Elementen hervorgehenden Det., Bagneras, Pascals Lehrsätze.

: Beziehungen zwischen den in einer rechteckigen Matrix enthaltenen Det., Vahlens Untersuchung.

: Besondere Bildungsformen

a) mit Bezug auf eine Anzahl gegebener Elemente: symmetrische, schiefe, halbsymmetrische Det., ‖ zyklische, Puchta und Noethersche Det., Differenzendeterminante, Hankelsche Det., Det. von Voigt, von Gegenbauer, ‖ Det. von Vandermonde, Wronskische, Jacobische (Funktionaldet.), Hessesche Det. ‖ aus Binomialkoeffizienten, aus Fakultäten, aus Einheitswurzeln, Det. besonderer Systeme, Kettenbruchdet., Det. von Smith, von Dostor. ‖ Det. durch eine Substitutionengruppe beherrscht, als allgemeiner Fall über den zyklischen und Puchta-Noetherschen Det. 83.

b) mit Bezug auf eine gegebene Det. als erzeugende: die Reziproke, zusammengesetzte Det., Hunyadys Det.

c) mit Bezug auf zwei gegebene Det. als erzeugende: Kroneckers, Picquets, Siaccis Lehrsätze.

— der Ordnung „unendlich", kubische und höhere Det.

— dient zur Darstellung für Bernoullische und Eulersche Zahlen, für eine ganze Funktion von x, für Potenzsummen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung, für Koeffizienten gebrochener Funktionen, für Kettenbrüche.

Diagonalen im Schema der Det.

Differenzendeterminante, siehe Umwandlung der Det., im Besonderen der Hankelschen Det. Siehe auch § 43.

Dostors Det. § 40, Beispiel einer Determinantenform, für die eine gewisse Abtheilung von Elementen des Schemas ohne Einfluss sind auf den Werth der Det.

Diskriminante einer Gleichung, Erklärung 220, ihr Verhältniss zur Vandermondeschen Det., dem Differenzenprodukt der Wurzeln 129. 220.

: ihr zwiefacher Ausdruck in Determinantenform 220 f.: als Hankelsche Det. aus Potenzsummen der Wurzeln und aus den Koeffizienten der Gleichung (die Diskriminante als Resultante).

— als Invariante 221.

: berechnet für gewisse Gleichungen, Literaturbericht 221.

Einheitswurzeln, Det. aus — 138 f. Siehe ferner zyklische Det.

Einschränkung der Det. auf ein Glied aus Diagonalelementen 3. 4.

Elemente des quadratischen Schemas, der Matrix der Det. 1.

: Hauptelemente, die der ersten Diagonale (Hauptdiagonale) des Schemas 3. Konjugierte — 25. Siehe auch kubische Det.

Entwicklung der Det., nach Minoren (§ 4) 14—17: Laplacescher Satz 17, nach Elementen einer Reihe 17, nach Produkten eines k-fachen Minorensystems: allgemeiner Laplacescher Satz (Jacobi) 37 f.

: Regel von Sarrus zur — von Det. 3. Ordnung 36, erweitert durch Bonolis 37. Fernere Literaturnachweise 37.

— der kubischen Det. nach den Elementen einer Schicht 190.

— nach Randelementen (Cauchy) 43 f. Siehe geränderte Det.

— nach Potenzen bei besonderer Beschaffenheit ihrer Hauptelemente (§ 11) 41 ff. Koeffizienten sind dabei die Summen der Hauptminoren von verschiedener Ordnung 42 (angewandt 65. 165. 167).

*Euler*sche Zahlen, siehe Bernoullische —.
Fakultäten, Det. aus — § 36.
Fibonaccis Reihe 153, siehe Kettenbruchdeterminante.
Frankes L., siehe zusammengesetzte Det., seine Beziehungen zu einem Jacobischen Satze 91.
Funktionaldeterminante, auch Jacobische Det., Erklärung und symbolische Bezeichnung 222 f. Literaturbericht 222.
: allgemeine Eigenschaften nach Sätzen Jacobis § 58.
: ihr Verschwinden nothwendige und hinreichende Bedingung für die Abhängigkeit von Funktionen mehrerer Veränderlichen 225 f.
: ihre Umformung im Fall, wo die Funktionen einen gemeinsamen Faktor haben, in die Det. K 227 f.
: bei $K \equiv 0$ Bestehen einer homogenen Gleichung zwischen den $(n+1)$ Funktionen u der n Veränderlichen x, Casoratis L. 229 f.
: Sätze von Torelli, die Jacobische Det. und die Det. K betreffend in Fällen, wo die einzelnen Funktionen in Faktoren zerfallen 230 ff.
— bei der Umwandlung vielfacher Integrale dienlich § 60.
: L. von Clebsch, Jacobische Det. von Jacobischen Det. betreffend 237 ff.
: Systeme Jacobischer Det. von n Funktionen $(n+1)$ Veränderlicher § 62.
Funktionen einer Veränderlichen. Siehe Wronskische Det.
: rationale — mehrerer Veränderlichen. Siehe Funktionaldet.
Ganze Funktion von x durch eine Det. dargestellt § 38.
Gebrochene Funktion (rationale) oder Bruchfunktion, ihre Koeffizienten in Determinantenform § 41.
Gegenbauers Det. als Aggregat von Quadraten darstellbar 82.
Glaisher, L. über zyklische Det.
Halbdeterminante, Scheibners Bezeichnung für Pfaffsche Funktion.
Halbsymmetrische Det. (auch hemi- oder schiefsymmetrische) Erklärung 55.
: wenn ungerader Ordnung, die — Det. gleich Null 56, ihre Reziproke eine symmetrische Det. 57.
: wenn gerader Ordnung, die — Det. gleich dem Quadrat einer ganzen rationalen Funktion (Cayley) 57 (Siehe Pfaffsche Funktion 60), ihre Reziproke eine halbsymmetrische Det. 57, ein jeder ihrer nicht diagonalen Minoren gleich dem Produkte zweier Pfaffschen Funktionen 63.
: wenn zugleich symmetrisch mit Bezug auf die zweite Diagonale, so dem Quadrate einer Det. der halben Ordnungszahl gleichwerthig 59.
*Hankel*sche Det. (auch orthosymmetrische, persymmetrische, rekurrierende Det.) § 19. Erklärung 67.
— darstellbar als Differenzendet. (Hankel) 68.
— verschwindet, wenn ihre $(2n-1)$ Elemente eine arithmetische Reihe bilden, deren Ordnung niedriger als $(n-1)$ 69, oder wenn sie in geometrischer Reihe fortschreiten 69.
— einer Konstanten gleichwerthig, wenn jene Elemente eine arithmetische Reihe der Ordnung $(n-1)$ darstellen 69.
: Übergang zu den Wronskischen Det. 69.
— als Katalektikante (Invariante) der binären Form gerader Ordnung 71.
: der — Det. verwandte 69 f., als Kanonizante (Kovariante) der binären Form ungerader Ordnung 70 f.
Hesse, L. Siehe Zerlegung der Det.
: Hessesche Det. § 64 f. Erklärung 244, eine symmetrische Funktionaldet. aus den n ersten Ableitungen einer Funktion. Literaturbericht 244.
: ihr Verhalten beim Übergang von homogenen zu nicht homogenen Veränderlichen 249 f.
: sie bleibt bei Anwendung einer linearen Transformation bis auf das Quadrat der Substitutionsdet. ungeändert 250 ff., eine Kovariante 251.
: ihr Verschwinden in Beziehung zu der Eigenschaft der gegebenen Funk-

tion, in Folge einer linearen Transformation von einer Veränderlichen unabhängig zu werden 252 f.
: Hessesche Kurve schneidet die ihr zugehörige Kurve in ihren Wende punkten 245 ff.
: Hessesche Fläche, in ihr die Punkte verschwindender Krümmung der zugehörigen Fläche 248 f.
Hunyadys Det. Erklärung 104, ihr Verhältniss zu der sie erzeugenden Det. nach dem L. von Scholtz (Hunyady) 105. Literaturbericht 104. 106.
Jacobi, Lehrsätze: Siehe reziproke Det., Funktionaldet., Fassung des allgemeinen Laplaceschen Satzes.
: Jacobische Det., siehe Funktionaldet.
: Jacobische Kurve zu dem System dreier Kurven § 63, ihre Ordnung 241, geht durch die gemeinschaftlichen Punkte der drei Kurven 241, als geometrischer Ort 242.
: Jacobische Kurve eines Netzes 242, als Ort der Doppelpunkte desselben 243, als Ort der Berührungspunkte zweier Kurven des Netzes 244.
Identität, fundamentale, als Grundform der Beziehungen zwischen den Det. einer rechteckigen Matrix 121 f.
Invarianten, siehe Hankelsche Det., Resultante, Diskriminante.
: Invariante Bedingungen für das Vorhandensein zweier, dreier gemeinschaftlicher Wurzeln zweier Gleichungen 219.
: fundamentale — zum Ausdruck der Resultanten dienend.
Kanonizante, siehe Hankelsche Det.
Katalektikante, siehe Hankelsche Det.
Kettenbruchdeterminanten oder Kontinuanten § 45. Erklärung 151. Literaturbericht 156 f.
: Rekursionsformel 152, für Kontinuanten allgemeinerer Art 154.
: ihre Gliederzahl (Reihe von Fibonacci) 152 f.
: Quotient zweier — als Näherungswerth eines Kettenbruchs 153.
Komplementäre Minoren 12 f., siehe Minor.
— Schnittlinien (Transversalen) im Schema 36, der Hauptdiagonale parallel und paarweise mit dieser gleichviele Elemente enthaltend, dienen zur Aussprache der Regel von Sarrus.
Konjugiert, siehe Elemente.
Kontinuanten, siehe Kettenbruchdet.
Kovariante, Hessesche Det. eine — 251, desgleichen die Kanonizante, Nebenform der Hankelschen Det.
Kroneckers L., den Werth einer Det. betreffend, deren Elemente die Produkte der Elemente zweier gegebener Det. 107 ff.
Kubische Det. § 54. Erklärung, n^3 Elemente mit dreifacher Indexbezeichnung bilden die kubische Matrix 185 f. Literaturbericht 184 f.
: vier Diagonalen, Hauptdiagonale, Anfangsglied 186.
: ihre Entwicklung, Vorzeichenbestimmung ihrer Glieder 186, zur kubischen Matrix gehören drei verschiedene Determinanten 186 f.
: Schichten, eine horizontale und zwei vertikale 187, Wirkung der Vertauschung paralleler Schichten 187 f.
— als Summe von $n!$ gewöhnlichen Det. 188.
: symbolische Darstellung des Produktes zweier gewöhnlicher Det. (Padova) 188 ff.
: algebraische Komplemente 190.
: Entwicklung der — Det. entsprechend dem Laplaceschen Satze nach den Elementen einer Schicht 190.
: Produkt einer — Det. und einer gewöhnlichen Det. (Armenante) 190 f.
*Laplace*scher Satz (auch Determinanten-Zerlegungssatz) 17, seine allgemeine Fassung durch Jacobi 37 f., Literaturbericht 38.
: seine Erweiterung § 25. Sätze von Reiss, Netto 98 f., Satz von E. Pascal 102 f.

Law of complementaries, of extensible minors 103, zwei allgemeine Verfahren von Muir zur Umwandlung von Determinantensätzen.
Le Paige, L. über geänderte Det., siehe Ränderung.
Lineare Gleichungen § 56, System von m Gl. in n Unbekannten ($m > n$) 197. Literaturbericht 205.
: Bedingungen der Verträglichkeit der Gl. 198 ff., in anderer Form nach Capelli 202. Siehe Matrix.
: Anzahl der unabhängigen Gl. p 199 f., grösste Zahl der im Systeme unabhängigen Gl. 202.
: Lösung des Gleichungensystems 200 f., Fälle: $m = n$, 202. $m = n + 1$, 202 f.
: homogene Gl. 203, gestatten sicher eine Lösung in Nullwerthen (identische Lösung) 203, ob noch mehrere, ist abhängig von der Rangzahl der Matrix der Koeffizienten 203. Fälle: $m < n$ und $m = n$ 203 f.
: Werthe der n Unbekannten für ($n - 1$) unabhängige homogene Gl. 204, ($n - 1$) in diesem Falle der Höchstbetrag der Gleichungenzahl 205.
: Gleichungensystem, in dem statt einer, zweier linearen Gl. quadratische auftreten 205 f.
Matrix, quadratische —, die Gesammtheit der Elemente des Schemas 3.
: kubische 185 f., bestimmt drei kubische Det. 186 f.
: rechteckige —, Erklärung 26, symbolische Bedeutung 27. Multiplikation zweier rechteckiger Matrices (§ 7) 26 ff., siehe Produktdet. Beziehungen der Det. innerhalb einer Matrix, siehe Vahlen.
: ihr Verschwinden und das ihrer Unterdet. § 55. Rangzahl p (Charakteristik) 192, eine der nicht verschwindenden Unterdet. p-ter Ordnung die Hauptdet. 194, in verschwindender Matrix besteht zwischen den Elementen jeder beliebigen Spalte dieselbe lineare homogene Beziehung (Umkehrung des Satzes § 2, 11) 192 ff. — besteht zwischen den Det. eines Systemes von p Zeilen und den gleichliegenden Det. eines zweiten solchen Systemes das Verhältniss der Proportionalität 195.
: Matrices, auseinander abgeleitet 196, haben den gleichen Rang.
: Matrix (A) der Koeffizienten eines Systems linearer Gl. vom Range p 197. Matrix (B), auch Matrix des Systems = Matrix (A) vermehrt um eine Spalte aus den bekannten Gliedern des Gleichungensystems 201. Δ_r = Hauptdet. aus (A) gerändert mit der letzten Spalte aus (B) und einer beliebigen, r-ten Zeile der Matrix (B) 197. 198 f. — $\Delta_r = 0$ nothwendige 198, hinreichende 201 Bedingung für die Verträglichkeit der Gl. des Systems, nach Capelli tritt dafür die Bedingung ein, dass Matrix (A) und Matrix (B) vom gleichen Rang 202.
Maximalwerth einer Det. § 53. Sylvesters umgekehrt orthogonale Det. 183 f. Untersuchung und Aufgaben von Hadamard 184.
Minor, auch Unterdet., Subdet., Partialdet., abgeleitete Det., durch Unterdrückung einer Anzahl von Reihenpaaren (Zeilen und Spalten) entstehend 11, die letzteren kreuzen sich in den Elementen des komplementären Minors 12 f.
: Ordnung des Minor 11, Hauptminoren oder diagonale Minoren 11, Anzahl der Minoren einer gegebenen Ordnung 11, der Hauptminoren desgleichen 12.
: ihr Klassencharakter 12, der nämliche für den komplementären Minor 13.
: Beziehung der Minoren einer Reihenkombination und der zu den Minoren einer parallelen Reihenkombination gehörigen Komplemente, wenn beide Kombinationen aus gleichvielen, nicht durchaus übereinstimmenden Reihen bestehen 18 f.
— der Produktdet. als Produkt rechteckiger Matrices.
: Minoren in Verflechtung 102.
Multiplikation der Det. mit einer Zahl k (§ 2, 6) 7; zweier Det. Siehe Produktdet.
Netto. Siehe Laplacescher Satz, Vahlen.
: Nachweis für den L. von Stieltjes 174.
*Noether*sche Det., siehe Puchta.
: Einschränkung eines Hesseschen Satzes 252 f.

Nullwerden der Det., allgemein unter Bedingungen: (§ 2, 1) 4. (§ 2, 5) 7. (§ 2, 8) 7 f. (§ 2, 11) 10.

: wenn die Elemente jeder Zeile eine arithmetische Reihe bilden, deren Ordnung nicht grösser, als $(n-2)$ 41.

: wenn die Elemente von h Zeilen arithmetische Reihen bilden, deren Ordnung nicht grösser, als $(h-2)$ 41.

: übrigens siehe Hankelsche Det.

Orthogonale Det. (= Det. der orthogonalen Substitution) § 46—50. Erklärung 157. Literaturbericht 164 f., ihre allgemeinen Eigenschaften (§ 46) 157 ff.: betreffend ihr Quadrat 157, den Werth ihrer Minoren 157 ff., das Produkt zweier 159. Anwendung bei geometrischen Fragen 163.

: Bestimmung ihrer Elemente durch die Werthe von $\frac{1}{2}n(n-1)$ unabhängigen Elementen, Aufgabe Cayleys § 47. Erweiterung dieser Aufgabe im Hinblick auf allgemeine quadratische Formen 163. Literaturbericht 163. Die schiefe Det. jener unabhängigen Elemente 160.

: Brioschis L. über die Natur der Gl., deren linke Seite durch die Entwicklung einer orthogonalen Det. mit um x vermehrten Hauptelementen dargestellt wird § 48.

: Lehrsätze Siaccis über Det., die aus zwei orthogonalen Det. zusammengesetzt erscheinen 168 f. 170.

: Siaccis L. über zwei gleichwerthige Det., die aus einer und derselben orthogonalen Det. entspringen 170 f.

: Siaccis L. über die aus einer orthogonalen hervorgehende Det., falls die Hauptelemente um die Einheit vermehrt werden 171 f., Beziehung dieses Satzes zum Satze von Stieltjes 172 f.

: L. von Stieltjes über Det., die aus zwei orthogonalen Det. vom Werthe $+1$ entstehen (§ 50) 173 ff.

: umgekehrt orthogonale Det., siehe Maximalwerth.

Parabolische Punkte einer Fläche oder Punkte verschwindender Krümmung. Siehe Hessesche Fläche.

Pascal E., siehe Erweiterung des Laplaceschen Satzes, Vahlen, Bagnera.

Persymmetrisch, siehe Hankelsche Det.

Pfaffsche Funktionen (Pfaffians nach Cayleys Bezeichnung, Halbdet. Scheibners) § 17. Erklärung, Vorzeichenbestimmung 60. Literaturbericht 60. Symbolische Bezeichnung Jacobis 60.

: Rekursionsformel, Darstellung durch Pfaffsche Funktionen niederer Ordnung 60 ff. Zahl der Entwicklungsglieder 62.

: ihr Zeichenwechsel 62.

: Produkt zweier Pfaffschen Funktionen, siehe halbsymmetrische Det.

Picquet, L. den Werth einer Det. betreffend, deren Elemente aus der Gesammtmatrix zweier n-reihiger Det. nach gewissem Verfahren zusammengesetzte Det. sind 109 f. und zwar D_m oder D_{n-m}, jenachdem m oder $(n-m)$ Spalten der ersteren Det. durch ebenso viele aus der zweiten ersetzt worden sind 109 f. Werth des Produkts dieser Det. D_m und D_{n-m} in einem Sylvesterschen Satze 111 f. ausgesprochen.

— L. einen Minor der Det. D_m betreffend 112 f.

Potenzdeterminante, siehe Vandermondesche Det.

Potenzsummen der Wurzeln einer Gl. § 39. Newtonsche Beziehungen 145.

: ihre Darstellung durch Det. 145, im besonderen Fall durch Kontinuanten 154 f.

Produktdeterminante zweier gegebener Det., eine Det. $2n$-ter Ordnung 21, ihre Zurückführung zur n-ten Ordnung 22 f.

: ihr Bildungsgesetz 23 f., vier Formen 24, Beziehung zwischen den Hauptminoren der in verschiedener Form dargestellten — 53 ff.

: ihr Minor als Produkt zweier rechteckiger Matrices (von je m Zeilen,

n Spalten) 27. 30. Fälle: $m > n$ 29, $m < n$ 29 f. Summe der Hauptminoren von gewisser Ordnung 55.
— zweier übereinstimmender Det. eine symmetrische Det.
— zweier reziproker Det., siehe reziproke Det.
— einer kubischen Det. und einer gewöhnlichen Det.
: ihre Entstehung, wenn die Faktoren Det. von ungleicher Reihenzahl (König) 50 ff.
Puchta, Det. von Puchta und Noether. Erklärung 80. Literaturbericht 79 f. Verwandtschaft mit der zyklischen Det. 82, verwandte Klasse noch allgemeinerer Det. 81.
: als Produkt von $n = 2^{\mu}$ Faktoren, die aus den Elementen linear zusammengesetzt sind 80 f.
: ihre Reziproke eine Det. derselben Art, wie bei den zyklischen Det. 81.
: ihre komplementären Minoren von der halben Ordnungszahl paarweise einander gleich 82.
Ränderung, geränderte, gesäumte Det. § 12.
: Satz von Le Paige über geränderte Det. § 52.
Rang, Rangzahl 205. Siehe Matrix, lineare Gleichungen.
: auch als Bezeichnung der Det. nach der Zahl der Indices ihrer Elemente (Dimensionen der Det.).
Reiss, L., siehe Laplacescher Satz.
: allgemeinerer Begriff der zusammengesetzten Det. 84.
Resultante zweier Gl. Erklärung 206. Literaturbericht 206 ff. Ihre Bedeutung für die Formenlehre, die — als Invariante 218, ausdrückbar durch fundamentale Invarianten 208, symbolische Darstellung nach Gordan 218.
: ihre verschiedenen Formen nach den Methoden von Euler 208, Bezout, Cayley, Sylvester. Umwandlung der Eulerschen Form in die von Bezout 214.
: ihr Verschwinden nothwendige 208 f., hinreichende 209 f. Bedingung für das Vorhandensein einer gemeinsamen Wurzel beider Gl. Bestimmung des Werthes dieser Wurzel 211. Gesammtzahl der gemeinsamen Wurzeln abhängig von dem Range der — 211, Bedingungen für p gemeinsame Wurzeln 214—217, hierher gehörende Untersuchungen von Darboux, Kronecker, Garbieri 212.
Reziproke Det. § 8. Erklärung (beruht auf dem System der Komplemente oder der algebraischen Komplemente zu den Elementen einer gegebenen Det.) 31. Sonderfall der zusammengesetzten Det. 83.
— wird Null sammt ihren Minoren bis zur 2-ten Ordnung 31. Verschwinden einzelner Minoren als Folge des Verschwindens von Minoren der erzeugenden Det. 34.
: ihr Werth ausdrückbar durch die erzeugende Det. (Cauchy) 32. Werth eines ihrer Minoren desgleichen durch die erzeugende Det. und einen Minor in dieser von komplementärer Lage (Jacobi) 33 f., beide Sätze enthalten in Sätzen von zusammengesetzten Det. 88. 91.
: die reziproke Det. zur Reziproken 34, reziproke Systeme nach Kronecker.
: Produktdet. zweier Reziproken als Reziproke der Produktdet. ihrer erzeugenden 34 f.
Säkulargleichung, ihre Wurzeln reell (Sylvesters Darlegung) 64 ff. Siehe symmetrische Det.
Sarrus, siehe Entwicklung der Det.
Schema, quadratisches 1, die anschauliche Grundlage für die Begriffsbestimmung der Det., seine Elemente 1, Diagonalen: Hauptdiagonale, zweite Diagonale 3.
Schichten der kubischen Det.
Schiefe Det. Erklärung 55 (verwandte Form: die schiefsymmetrische oder halbsymmetrische Det., für beide Formen kommt auch die umfassende Benennung symmetrale Det. vor).
: ihre Hauptminoren sind desgleichen schiefe Det. 56.

— mit Hauptelementen = 1 darstellbar als Summe von Quadraten 66 f.
— aus den unabhängigen Elementen der orthogonalen Substitution 160.
Scholtz, L. § 26, die nach Hunyady benannte Det. betreffend 105.
Scott, L. über zyklische Det.
Siacci, L. die Det. betreffend, deren Elemente aus den Paaren gleichliegender (homologer) Elemente zweier gegebener Det. linear zusammengesetzt sind 114.
: Lehrsätze über orthogonale Det.
*Smith*sche Det. § 42, eine symmetrische Det.
Souillart, L. über zyklische Det.
Stern, L. über gewisse zyklische Det.
Stieltjes, L. Siehe orthogonale Det.
Sylvesters Determinantensatz 93. Spottiswoodes oder Sylvesters Satz 87. Siehe zusammengesetzte Det.
: L. 111, siehe Picquet.
— umbral notation, symbolische Bezeichnung der Det. 83.
— dialytische Methode zur Darstellung der Resultante 208 f.
Symmetrische Det., Erklärung 25. 55 (verwandte Formen: die schiefe, halbsymmetrische Det.). Das Quadrat einer beliebigen Det. ist eine — Det. 25.
: ihre Hauptminoren desgleichen symmetrisch 55.
: ihre Reziproke eine — Det. 56.
: Beispiele, die zyklische, Puchta und Noethersche, Smithsche Det., die Resultante nach Bezout 213, die Hessesche Det.
Theilbarkeit der Det. durch die (n — 1)-te Potenz einer Zahl, die Theiler ihrer sämmtlichen Minoren zweiter Ordnung ist (Janni) 39.
Torelli, Lehrsätze über zyklische Det., über Funktionaldet.
Umwandlung der Det. (in gleichwerthige) § 10.
: in die Det. nächst niederer Ordnung aus Minoren 2-ter Ordnung nach zweifachem Verfahren 38 f.
: in den Quotienten zweier Det. (Studnička) 39 f.
: in eine Differenzendet. von gleicher Ordnung 40 f.
: nach Verfahren von Fouret 141.
Unendlich, Det. der Ordnung — § 51. Erklärung 176. Literaturbericht 175 f.
: Konvergenzbedingung für die unendliche Det. mit den Hauptelementen 1 (Poincaré) 176 f.
: Konvergenzbedingung für den allgemeinen Fall (v. Koch) 177 f.
: Normalform dieser Det. 178. Produkt zweier normaler Det. 178.
Unterdeterminante, siehe Minor.
Unveränderlichkeit der Det., allgemein bei Verfahren: (§ 2, 3) 5 f.; (§ 2, 7) Janni, Fürstenau 7; (§ 2, 10) 9 f.
: übrigens siehe Umwandlung, Dostors Det.
Vahlen, Untersuchung über die Det. innerhalb einer rechteckigen Matrix § 29. Anzahl der zwischen ihnen bestehenden unabhängigen Gl. 116 f. Betrachtung über den Grad dieser Gl. § 30. Identische Beziehungen, ausgedrückt in einer Formel Nettos und einer verwandten E. Pascals 120. Zurückführung jener Determinantengleichungen auf eine Grundform 2-ten Grades § 31, die fundamentale Identität b) 122.
*Vandermonde*sche Det., auch Det. Cauchys, Potenzdet., Det. der Wurzeln einer Gl. § 33. Erklärung 128 f. Literaturbericht 130 f.
: ihr Quadrat, die Diskriminante, eine Hankelsche Det. 129.
: ihre allgemeinere Form 129 f., ausdrückbar durch die vollständigen homogenen Funktionen, die Aleph Wronskis 130, theilbar durch die Vandermondesche Det. 131.
: ihr Ausdruck, im Fall die Reihe der r-ten Potenzen durch die Reihe der n-ten Potenzen ersetzt wird 131 f.
Vertauschung zwischen gleichnamigen Zeilen und Spalten der Det. (auch Trans-

position) (§ 2, 3) 5 f., zwischen parallelen Reihen (§ 2, 4) 6 f.; zwischen horizontalen 187, vertikalen 188, parallelen Schichten der kubischen Det.
Voigt, Det. von —, Erklärung 82, Darstellung durch die Summe zweier Quadrate 82.
Wendepunkte einer Kurve sind ihre Schnittpunkte mit der Hesseschen Kurve.
Wronski, Det. von — oder Det. der n Funktionen, des Funktionensystems 48 ff. Erklärung 48, ihre wesentliche Bedeutung für die Frage, ob die Funktionen des Systems linear abhängig sind von einander oder nicht. Literaturbericht 48.
: zwei Eigenschaften dieser Det., einmal ihre Ableitung betreffend 48 f., dann ihr Verhalten, wenn jede Funktion des Funktionensystems mit ein und derselben Funktion multipliziert wird 49 f.
: Aleph Funktionen, siehe Vandermondesche Det.
von Zeipels Det., siehe Binomialkoeffizienten.
Zerlegung der Det.: in ein Aggregat von Det. (Additionstheorem), bei Anwesenheit mehrgliedriger Elemente (§ 2, 9) 8 f.
— in zwei lineare Faktoren, wenn das Komplement eines Elementes verschwindet (Hesse) 44 f.
— in Faktoren, entsprechend der Ordnungszahl der Det., im besonderen Fall der zyklischen Det., der Det. von Puchta und Noether.
— in ein Aggregat von Quadraten, siehe Det. von Voigt, Gegenbauer.
Zirkulanten, siehe zyklische Det.
Zusammengesetzte Det. (= compound determinants) Erklärung und Verhältniss zur Reziproken 83. Anordnung ihrer Elemente 85 f. Erweiterter Begriff, allgemeinere Aufgabe Sylvesters § 24. Literaturbericht 83 ff.
: Beziehung zur erzeugenden Det., Lehrsatz von Spottiswoode (Sylvester) 87 f.
: ihre Minoren in Beziehung zur erzeugenden Det. und deren Minoren 88 f. Frankes Lehrsatz 91.
: ihre Minoren bei beschränkter Auswahl der an ihrer Bildung betheiligten Reihenpaare der erzeugenden Det., dargestellt als Produkt von Potenzen der erzeugenden Det. und gewisser Minoren der letzteren 92 ff. Sylvesters Determinantensatz 93 f. Lehrsätze von D'Ovidio 94 f.
: Paar zusammengesetzter Det. D_m, D_{n-m} den Systemen paarweise komplementärer Minoren entsprechend 85 f., ihr Produkt nach Cauchy 86, aus beiden durch Multiplikation der homologen Elemente gebildete Det. Satz von D'Ovidio 94 f.
Zyklische Det. (auch Zirkulante, doppelt-orthosymmetrische Det.) § 20. Erklärung 71 f. Sonderfall der Hankelschen Det. 72. Nebenform 74. Schiefzyklische Det. 74. Literaturbericht 73 f.
— als Produkt von n rationalen Funktionen mit Hilfe der n-ten Einheitswurzeln 72 f.
— aus einer Reihe ganzer Zahlen, deren Summe gleich Null. Lehrsatz von Stern 78.
: Produkt zweier zyklischer Det. (Souillart) 78 f.
: Zurückführung der zyklischen (schiefzyklischen) Det. auf gleichartige Det. niedrigerer Ordnung. Lehrsätze von Glaisher, Torelli 74 ff.
: Darstellung der zyklischen Det. ($n = 2m$) als Produkt einer zyklischen und einer schiefzyklischen der halben Ordnungszahl. Lehrsatz von Scott 75 ff., erweitert durch Torelli 77.
: besondere Formen des Schemas der — Det., aus Elementen ± 1 Catalan 139, Fouret 140 f., Studnička 141 f., aus Gliedern einer arithmetischen Reihe Cremona und Lemonnier § 44.

MATHEMATICS-STATISTICS LIBRARY

MATHEMATICS-STATISTICS LIBRARY

512.83 P27FL
QA 191 P26

Stanford University Libraries
3 6105 002 054 075

Stanford University Libraries
Stanford, California

Return this book on or before date due.

JUN 07 1995